Almindelige Egenskaber

ved

Systemer af plane Kurver,

med Anvendelse til

Bestemmelse af Karakteristikerne i de elementære Systemer
af fjerde Orden.

Med 5 Tavler.

Af

H. G. Zeuthen.

Vidensk. Selsk. Skr. 5 Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. 10 B. IV.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Bogtrykkeri.

1873.

Da Chasles i sine Afhandlinger i *Comptes rendus de l'Académie des sciences* i 1864 havde grundlagt Læren om Keglesnittenes Karakteristiker, maatte de vigtige Resultater, hvortil den førte, og den overordentlige Lethed, hvormed de opnaas, anspore til at udvide denne Lære til Kurver af alle Ordener. I saa Henseende fik Bestræbelserne en bestemt Retning derved, at Chasles fandt den Sætning (¹), at Antallet af Kurver i et System af hvilkensomhelst Orden med Karakteristikerne μ og μ' (se i det følgende 3), som røre en Kurve af Ordenen n og Klassen n', er $n'\mu + n\mu'$, og dertil knyttede den Formodning, at — i Almindelighed som ved Keglesnittene — Antallet af Kurver, der tilfredsstille en given Betingelse, vilde have et Udtryk af Formen $\alpha\mu + \alpha'\mu'$, hvor α og α' kun afhænge af den givne Betingelse, medens μ og μ' fuldstændig repræsentere Systemet. I saa Fald kunde man paa samme Maade som ved Keglesnittene finde Antallene af de Kurver med givne Plückerske Tal, der tilfredsstille saadanne Betingelser, hvis tilsvarende Tal α og α' man kjender, naar man blot først havde fundet Karakteristikerne i alle de elementære Systemer med disse Plückerske Tal, det vil sige i saadanne Systemer, hvor de givne Betingelser kun ere de at skulle gaa gjennem givne Punkter og røre givne rette Linier. Chasles opfordrede derfor navnlig til at søge de elementære Systemers Karakteristiker.

Nogle vigtige Resultater vedrørende Kurvesystemer af alle Ordener, og ikke blot elementære Systemer, fremkom snart fra de Jonquières (²), der for at faa dem tildels kun behøvede at angive de Grænser, indenfor hvilke nogle Resultater, han allerede i 1861 havde udtalt, vare rigtige; men de strække sig kun til Kurver uden særegne Punkter, hvoraf mindst et vist Antal Punkter ere givne. Derimod blev Bestemmelsen af Karakteristikerne blot i alle de elementære Systemer af Kurver af tredie Orden først fundet i 1870 af en ung Franskmand Maillard. Udgivelsen af hans meget fuldstændige Arbejde, som han benyttede

(¹) At den her anførte Sætning er rigtig ogsaa da, naar den givne Kurve eller Kurverne i Systemet have særegne Punkter, fremgaar af det Bevis, jeg har givet i *Mathematische Annalen* 3die Bd. S. 153, om jeg end ikke udtrykkelig gjør den sidste Forudsætning.

(²) Navnlig i Crelle-Borchardt: Journal, 66de Bd.

til Erhvervelse af Doktorgraden, sinkedes ved Krigen og Kommunen, saa det først udkom i Slutningen af 1871 ([1]).

Uden at vide noget om Maillard's netop udkomne Arbejde gav jeg mig i Januar 1872 ifærd med den samme Opgave, denne Gang med mere Held, end naar jeg tidligere havde forsøgt det, og jeg kunde i Februar sende Resultaterne til Chasles, som, uagtet han selvfølgelig kjendte Maillard's Afhandling, strax lod mine Meddelelser indrykke i *Comptes rendus* ([2]), paa Grund af den Betydning, flere Løsninger af denne Opgave kunde have med Hensyn til Løsningen af de tilsvarende Opgaver vedrørende Kurver af fjerde Orden. Paa disses Behandling begyndte jeg dernæst, og det ikke alene paa Grund af Resultaternes før omtalte Betydning. Undersøgelsen af Kurverne af tredie Orden havde nemlig vist mig, hvilken Betydning det har for en fuldstændig Opfattelse af plane Kurvers Særegenheder at se, hvorledes de blive til i et System af Kurver med en variabel Parameter, samt at Bestemmelsen af Karakteristiker, ved hvilken de særegne Kurver, deriblandt ogsaa saadanne, som have Mangefoldsgrene, spille en Hovedrolle ([3]), giver et godt Middel til at finde og prøve Egenskaberne ved disse Kurver, samt til at sikre sig mod at glemme nogen særegen Kurve. Med dette Kjendskab til de særegne Kurver følger et Indblik i den Rolle, som under Bestemmelsen af Kurver ved givne Betingelser de forskjelligartede Løsninger spille, der fremkomme samtidig, og som samtidig vilde tilfredsstille samme Ligning, hvis man vilde benytte Analysens Hjælp. Formlerne i mit andet Afsnit — som overhovedet Formler, der findes ved «*Principe de correspondance*» — angive netop, hvorledes det fuldstændige Antal af Løsninger af en Opgave, som kan udtrykkes ved en algebraisk Ligning, fordeles paa de forskjelligartede Løsninger.

Det er klart, at man i disse Henseender maatte opnaa langt mere ved Undersøgelsen af Kurver af fjerde Orden, der kunne have indtil tre særegne Punkter, end ved Undersøgelse af Kurver af tredie Orden, hvor der højst er ét — om end Vanskelighederne voxe i samme Forhold som Udbyttet. Blandt Kurver af fjerde Orden (eller Klasse) træffer man saaledes paa alle de Kurver, der have saadanne særegne Punkter (eller Tangenter), som i Almindelighed i et System ville kunne fremkomme ved Omdannelse eller Sammenfalden af Dobbeltpunkter og Spidser (eller Dobbelttangenter og Vendetangenter). Man kan derfor, som jeg har gjort i denne Afhandling, give de Undersøgelser og Formler, der anvendes ved

---

([1]) *Recherche des caractéristiqus des systèmes élémentaires de courbes planes du troisième ordre* Paris 1871.

([2]) *Détermination des caractéristiques des systèmes élémentaires de cubiques.* C. R. 19, 26 février et 11 mars 1872.

([3]) Dette viser sig allerede ved Keglesnit. Se min Afhandling: *Nyt Bidrag til Læren om Systemer af Keglesnit.* Kjøbenhavn 1865.

Bestemmelsen af Karakteristiker i Systemer af fjerde Orden, en saadan Almindelighed, at de kunne anvendes paa Systemer af alle Ordener. Ganske vist ville dog disse Formler og de andre Fremgangsmaader, som jeg anvender paa elementære Systemer af fjerde Orden, ikke være tilstrækelige til ogsaa at bestemme Karakteristikerne i alle de elementære Systemer af Kurver af femte eller højere Orden.

Det fremgaar af de foranstaaende Bemærkninger, at den Ordning af Stoffet, som man vil finde i efterfølgende Afhandling (1), er meget forskjellig fra den, jeg har fulgt i mine Undersøgelser. De Egenskaber, som jeg i første og i tredie Afsnit giver en analytisk Begrundelse, og som derefter benyttes til Bestemmelse af Koefficienter i Formler i andet og tredie Afsnit, har jeg i Virkeligheden for en stor Del først fundet gjennem disse Formler og de deraf udledte Tal, idet de omtalte Koefficienter da bestemtes ved ad forskjellige Veje at udlede samme Resultat (Smlgn. 31 og 45).

Det Spørgsmaal ligger nær, om nu den før omtalte Formodning af Chasles angaaende de to Karakteristikers fuldstændige Tilstrækkelighed til at repræsentere et System overfor Indførelsen af hvilkensomhelst ny Betingelse er bleven bekræftet. Dette har ganske vist ikke været Tilfældet (2), men alene den Omstændighed, at som sagt to Karakteristiker ere tilstrækkelige, naar den nye Betingelse gaar ud paa Røring med en given Kurve, giver i alle Tilfælde Karakteristikerne i de elementære Systemer en meget udstrakt Anvendelse. Man maa i alt Fald begynde med de elementære Systemer, og de Veje, som derved benyttes, ville i mange Tilfælde kunne anvendes til direkte at finde Karakteristikerne i saadanne Systemer, hvor det maatte vise sig, at den af Chasles formodede Vej ikke kan bruges. — I hvor stort Omfang nu Chasles's Hypothese gjælder, og med hvilke Modifikationer den gjælder i et endnu større Omfang, indlade vi os her ikke paa at undersøge; men jeg haaber, at min Afhandling vil bringe Materiale ogsaa til Besvarelse af dette Spørgsmaal.

Vi skulle her endnu kun gjøre opmærksom paa, at en Fortegnelse over den Literatur, der knytter sig til Læren om Karakteristiker, findes i *Bulletin des Sciences mathématiques* 1872. S. 155.

---

(1) Om noget af denne Afhandlings Indhold har jeg givet et Par Meddelelser i *Comptes rendus* for 23de Septbr. og 21de Oktbr. 1872.

(2) Til dette samme Resultat kommer Clebsch i sin for ganske nylig — efter Forf.'s Død — udkomne Afhandling: *Zur Theorie der Charakteristiken*, Mathematische Annalen VI S. 1, idet han analytisk viser, at denne Paastands Rigtighed for Keglesnittenes Vedkommende beror paa Egenskaber, som kun tilhøre disse Kurver.

Første Afsnit.

Beskrivelse af et Kurvesystems sædvanlige særegne Kurver uden Mangefoldsgrene.

---

1. System af Kurver. — Naar en algebraisk Kurve er

af Ordenen n	af Klassen n'
og har d Dobbeltpunkter	og har d' Dobbelttangenter
og e Spidser,	og e' Vendetangenter,

maa disse Tal som bekjendt tilfredsstille følgende tre Ligninger (de Plücker'ske)

$$\left.\begin{aligned} n\,(n-1) &= n' + 2d + 3e \\ n'(n'-1) &= n + 2d' + 3e' \\ e'-e &= 3\,(n'-n). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)\,[1].$$

Til at bestemme Kurven kræves $\frac{n\,(n+3)}{2} - d - 2e \left(= \frac{n'(n'+3)}{2} - d' - 2e'\right)$ opgivne Betingelser. Der vil saaledes være uendelig mange Kurver, der ere underkastede

$$\frac{n\,(n+3}{2} - d - 2e - 1 \left(= \frac{n'(n'+3)}{2} - d' - 2e' - 1\right)$$

opgivne Betingelser. Disse siges at danne et System.

2. Analytisk Fremstilling af et System af Kurver. — Analytisk bestemmes et Kurvesystem af n'te Orden ved en Ligning af n'te Grad mellem Punktkoordinater samt de $\frac{n\,(n+3)}{2} - 1$ Ligninger mellem denne Lignings $\frac{n\,(n+3)}{2}$ Konstanter, som udtrykke, dels at Kurven har d Dobbeltpunkter og e Spidser, dels at den skal tilfredsstille de opgivne Betingelser. Vi betragte kun Systemer, hvor ogsaa disse sidste Betingelsesligninger ere algebraiske. I saa Fald kunne Konstanterne i Kurvens Ligning tænkes udtrykte som algebraiske Funktioner (i videste Betydning ɔ: Rødder i algebraiske Ligninger) af en blandt dem, eller af en ny Konstant k. Idet man paa samme Maade kunde være gaaet ud fra Kurvens Tangentligning, ses det, at et Kurvesystem kan fremstilles ved en Punkt- eller Tangentligning, hvis Koefficienter ere algebraiske Funktioner af en Parameter k. Denne bør vælges saaledes, at de enkelte Kurver i Systemet ikke bestemmes hver ved flere forskjellige Værdier af k. Hvis man f. Ex. først havde indført en saadan Parameter k, som overalt kun forekom i Forbindelsen $f(k)$, hvor f er en (af x og y uafhængig) Funktion af højere end første Grad, burde man betragte $f(k)$ som Systemets Parameter og ombytte denne Funktion med den enkelte Betegnelse k. At man virkelig altid paa denne

---

[1] Blandt de heraf afledte Ligninger er det ofte bekvemt at bruge $2\,(d'-d) = (n'-n)\,(n'+n-9)$.

Maade kan opnaa, at der til de enkelte Kurver i Systemet svarer bestemte Værdier af k, er klart; thi dette vil f. Ex. være Tilfældet, naar k er en af selve Koefficienterne i Kurvens Ligning. Enkelte Kurver i Systemet kunne dog danne Undtagelser i denne Henseende: en saadan, der altsaa svarer til flere Værdier af k, forekommer da flere Gange i Systemet.

Dette samme vil være Tilfældet, naar flere af de Kurver, der svarer til samme Værdi af k, falde sammen. Medens man kan bringe hver Kurve i Systemet til at have sin tilsvarende bestemte Værdi af k, kan man nemlig ikke i Almindelighed opnaa, at hver Værdi af k kun bestemmer én Kurve. Dette vil kun finde Sted, naar Ligningens Koefficienter ere rationale Funktioner af k; men man véd, at dette ikke kan opnaas ved nogen Indførelse af en ny Parameter, naar f. Ex. Koefficienterne i Ligningen ere forelagte som Funktioner af k og $\sqrt{R}$, hvor R er et Polynomium i k af højere end anden Grad. (Smlgn. Læren om algebraiske Differentialers Integration).

Naar man skal undersøge de Kurver i Systemet, som ligge nærmest ved en enkelt bestemt, vil det være bekvemt at vælge k saaledes, at denne svarer til $k = 0$, hvad der altid kan opnaas ved at ombytte $k - k_1$ med k. Venstre Side i Systemets Fællesligning $\varphi = 0$ kan da udvikles i en Række efter stigende Potenser af k, hvor det konstante Led bliver $\varphi^{(0)}$, idet $\varphi^{(0)} = 0$ er den Kurve i Systemet, hvis nærmeste Kurver vi vilde undersøge. Rækken bliver konvergent, saalænge k er numerisk mindre end en vis endelig Grænse, der bestemmer, hvor stor en Del af Systemet man ad denne Vej kan undersøge. Hvis Rækken indeholder brudne Exponenter med Generalnævneren p, kan man ved for k at indføre den nye Parameter $k^{\frac{1}{p}}$ — som atter kaldes k — gjøre dem hele. Vi faa paa denne Maade omformet Systemets Ligning til

(I) $$\varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} k + \varphi^{(2)} k^2 + \dots \varphi^{(r-1)} k^{r-1} + \psi k^r = 0,$$

hvor Funktionerne φ ere uafhængige af k, medens ψ er en Funktion af k samt x og y, som ikke bliver uendelig for $k = 0$, eller, hvis man lader r være uendelig, til

(I b) $$\varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} k + \varphi^{(2)} k^2 + \dots = 0.$$

Skal Kurven $\varphi^{(0)}$ forekomme flere Gange blandt de til $k = 0$ svarende Kurver i Systemet, maa det ske ved, at enten de andre Led i den uendelige Række indeholde andre irrationale Konstanter, end der allerede findes i $\varphi^{(0)}$, eller ved at man identisk har $\varphi^{(1)} = 0$, $\varphi^{(2)} = 0 \dots \varphi^{(q-1)} = 0$. I første Tilfælde kan man særskilt undersøge de Kurver, der under hver af $\varphi^{(0)}$'s Forekomster i Systemet ligge den nærmest, i andet Tilfælde derimod ville q paa hinanden følgende Kurver i Systemet falde sammen i $\varphi^{(0)}$.

Da vi nu ikke uden at gjøre Brud paa vore Forudsætninger paany kunne ombytte k med nogen anden ny Parameter end ak, hvor a er en vilkaarlig Konstant eller i alt Fald en saadan Funktion af k, som for $k = 0$ antager en endelig Værdi, kunne vi om en Størrelse u, der afhænger af Konstanterne i en Kurve i Systemet, som nærmer sig til at falde sammen med $\varphi^{(0)}$, sige, at den for lim. $k=0$ er uendelig lille af Ordenen α, naar $\frac{u}{k^\alpha}$ antager en endelig Værdi for $k=0$. k betragtes da som uendelig lille af første Orden. Udvikles u i Række efter stigende Potenser af k, bliver første Led Ak^α, hvor A er en af k uafhængig Konstant, nemlig Værdien af $\frac{u}{k^\alpha}$ for $k=0$. At to Størrelser ere uendelig smaa af samme Orden, kan ogsaa udtrykkes ved, at man siger, at de ere proportionale. u er i det her antagne Tilfælde proportional med k^α.

Afstandene mellem Kurven $\varphi^{(0)}$, der var en vilkaarlig Kurve i Systemet, og en nærliggende, der bestemmes ved Konstanten k, ville, naar lim. $k=0$, i Almindelighed være uendelig smaa af første Orden. Vi kunne nemlig antage, at der er brugt Punktkoordinater, og at et vilkaarligt (enkelt) Punkt af Kurven $\varphi^{(0)}$ er taget til Begyndelsespunkt O, og at en vilkaarlig ret Linie herigjennem — blot ikke Tangenten — er taget til Abscisseaxe. Første Led i Abscissen til den nærliggende Kurve φ's nærmeste Skjæringspunkt med Abscisseaxen bestemmes da ved i Ligningen

$$\varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} . k = 0$$

af $\varphi^{(0)}$ kun at tage det Led, som indeholder x^1, og af $\varphi^{(1)}$ kun det konstante Led. Er dette forskjelligt fra Nul, bliver den paagjældende Abscisse for lim. $k=0$ uendelig lille af første Orden. Havde Kurven $\varphi^{(0)}$ rørt Abscisseaxen, vilde man faa to Abscisser af Ordenen $\frac{1}{2}$.

Havde det betragtede Punkt været et af de d Dobbeltpunkter eller en af de e Spidser — altsaa ikke et «nyt» Dobbeltpunkt, hvorom nærmere i 10 o. f. — maatte man til Bestemmelse af første Led i Abscisserne til Abscisseaxens to nærmeste Skjæringspunkter med en nærliggende Kurve benytte Ligningen

$$\varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} k + \varphi^{(2)} k^2 = 0,$$

hvor $\varphi^{(0)}$ ikke indeholder Led under anden Grad med Hensyn til x og y, og $\varphi^{(1)}$ ikke Led under første Grad. Om Rigtigheden af den sidste Paastand overbeviser man sig let derved, at den nærliggende Kurves Ligning ved en lille Forflyttelse af Koordinatsystemet skal kunne bringes til ikke at indeholde Led under anden Grad. Naar da $\varphi^{(2)}$ ikke ogsaa bliver Nul for $x=y=0$, blive ogsaa disse Abscisser for lim. $k=0$ uendelig smaa af første Orden. Paa lignende Maade kunde mere sammensatte særegne Punkter behandles, hvis Systemets Kurver havde saadanne.

Naar $x=y=0$ i det første af de her betragtede Tilfælde gjør $\varphi^{(1)}=0$, eller i det andet $\varphi^{(2)}=0$, bliver den omtalte Abscisse, eller i andet Tilfælde en af de to Abscisser, uendelig lille af højere Orden. Et saadant Punkt, hvis Afstand fra den nærliggende Kurve (bestemt ved lim. $k=0$) bliver uendelig lille af anden eller højere Orden, ligger paa Indhyllingskurven til Systemets Kurver. Dette bliver saaledes Tilfældet med ethvert Skjæringspunkt med den konsekutive Kurve (ɔ: den Grænsestilling, hvortil et Skjæringspunkt mellem $\varphi^{(0)}$ og en nærliggende Kurve nærmer sig for lim. $k = 0$), som ikke er et særeget Punkt paa Kurven $\varphi^{(0)}$, idet disse Skjæringspunkter netop bestemmes ved $\varphi^{(1)} = 0$. Det viser sig, at naar $\varphi^{(1)}$ identisk er Nul, vil $\varphi^{(0)}$, hvori vi før saa, at i dette Tilfælde to paa hinanden følgende Kurver faldt sammen, udgjøre en Del af Indhyllingskurven.

Naar man endvidere søger Tangens til den Vinkel, som en Tangent til Kurven $\varphi^{(0)}$ danner med den Tangent fra et af dens Punkter (dog ikke Røringspunktet) til den ved k bestemte Kurve, som for $k = 0$ falder sammen med Tangenten til $\varphi^{(0)}$, vil denne ogsaa for lim. $k = 0$ være uendelig lille af første Orden, medmindre den rører Systemets Indhyllingskurve. Da dette er samme Resultat, som man vilde faa ved Anvendelse af Liniekoordinater, viser det sig, at en og samme Parameter k vil tilfredsstille de før opstillede Betingelser, hvad enten man fremstiller Systemet ved Punktkoordinater eller ved Liniekoordinater. Det ses ogsaa, at Indhyllingskurven rører de Fællestangenter til Kurven $\varphi^{(0)}$ og den konsekutive Kurve i Systemet, som ikke ere særegne Tangenter til $\varphi^{(0)}$.

Særegne Kurver i Systemet kunne, som vi skulle se, have særegne Punkter og Tangenter, som have Afvigelser (Afstande og Vinkler) af lavere end første Orden fra Nabokurvens Punkter og Tangenter, eller som kunne ligge paa eller røre Indhyllingskurven, medens dog deres Afvigelser ere af lavere end anden Orden. At de ligge paa eller røre Indhyllingskurven, beror da paa, at de ere Grænsestillinger for saadanne Punkter og Linier, som gjøre det.

3. Karakteristiker. — Naar man til Systemets Betingelser føjer endnu én, faas det tilstrækkelige Antal Bestemmelser af en Kurve. Der vil saaledes være et endeligt Antal Kurver i et System, som tilfredsstille en ny Betingelse, saasom at gaa gjennem et givet Punkt, røre en given ret Linie, have et Dobbeltpunkt beliggende paa en given ret Linie o. s. v. — Vi kalde

Antallet af Kurver, som gaa gjennem et givet Punkt . . . . μ;
Ordenen af det geometriske Sted for:
Dobbeltpunkterne . . . . b,
Spidserne . . . . c;
Klassen af Indhyllingskurven for:
Tangenter i Dobbeltpunkter . . . . . . p,
Tangenter i Spidser . . . . q,

Antallet af Kurver, som røre en given ret Linie . . . . μ';
Klassen af Indhyllingskurven for:
Dobbelttangenterne . . . . b',
Vendetangenterne . . . . c';
Ordenen af det geometriske Sted for:
Røringspunkter med Dobbelttangenter p',
Røringspunkter med Vendetangenter . q',

Klassen af Indhyllingskurven for:

Tangenter fra Dobbeltpunkter . . . . . u,

Tangenter fra Spidser . . . . v,

Forbindelseslinier mellem Dobbeltpunkter . . . . x,

Forbindelseslinier mellem Dobbeltpunkt og Spids . . . . y,

Forbindelseslinier mellem Spidser . . . z.

Ordenen af det geometriske Sted for:

Kurvens Skjæringspunkter med Dobbelttangenter . . . . u',

Kurvens Skjæringspunkter med Vendetangenter . . . . v',

Skjæringspunkter mellem Dobbelttangenter . . . . x',

Skjæringspunkter mellem Dobbelt- og Vendetangent . . . . y',

Skjæringspunkter mellem Vendetangenter . . . . z'.

μ og μ' kaldes Kurvesystemets første og anden Karakteristik. Naar den fælles Punktligning for Kurver i et System gjøres hel og rational med Hensyn til Parameteren k, vil Karakteristiken μ være Graden af den saaledes omdannede Ligning. Er det Tangentligningen, som man gjør hel og rational, bliver Graden Karakteristiken μ'. Den omdannede Ligning vil for en konstant Værdi af k under ét fremstille den Gruppe blandt Kurverne i Systemet, som svarer til denne Værdi af k.

Naar der er Tale om Kurverne (b), (b'), (c) ..., forstaas derved de Kurver, hvis Orden eller Klasse betegnes ved b, b', c ...

4. Sædvanlige særegne Kurver; Inddeling af disse i to Hovedklasser. — De særegne Kurver i et System ere saadanne, der have andre særegne Punkter eller Tangenter end en vilkaarlig Kurve i Systemet. De særegne Kurver af en vis Art findes ved til Systemets Betingelser at føje den, at Kurven skal have den paagjældende nye Særegenhed, og Systemet vil virkelig indeholde saadanne (reelle eller imaginære) Kurver, naar den nye Betingelse kan udtrykkes ved en Ligning i k. Hvilke særegne Kurver et System vil indeholde, beror ikke blot paa, hvilke dets Plücker'ske Tal (n, n', d ...) ere, men ogsaa hvilke de andre Betingelser ere, som det er underkastet. Man finder saaledes sædvanligvis i et System af Kurver saadanne, som have et nyt Dobbeltpunkt (altsaa ialt $d+1$); men i specielle Tilfælde kan den Ligning, som tjener til Bestemmelse af saadanne Kurver, give Værdier af k, som svare til Kurver, der f. Ex. have to nye Dobbeltpunkter. Det ligger da nær — her som i lignende Undersøgelser — særligt at undersøge de sædvanlige særegne Kurver i ethvert System med givne Plücker'ske Tal, idet man da derved maatte forstaa saadanne, som bestemmes ved en enkelt Betingelse føjet til dem, som alene udtrykke, at Kurven skal have de givne Plücker'ske Tal. Da denne Betingelse indføres forud for og altsaa uafhængigt af Systemets øvrige Betingelser, maatte man vente at finde saadanne særegne Kurver — eller saadanne, der dannes deraf ved yderligere Tilføjelser af Særegenheder — i ethvert System af Kurver med de samme

Plücker'ske Tal, en Omstændighed, der skulde synes at kunne tjene som Kjendemærke paa de sædvanlige særegne Kurver. Undersøgelser over Systemer med sædvanlige særegne Kurver vilde ogsaa kunne anvendes paa saadanne Systemer, hvori der findes usædvanlige særegne Kurver, idet en saadan betragtes som en Kurve, hvori flere sædvanlige særegne Kurver ere faldne sammen, en Kurve med to nye Dobbeltpunkter f. Ex. som en saadan, hvori to med ét nyt Dobbeltpunkt ere faldne sammen.

Her frembyder sig imidlertid den Vanskelighed, at én og samme Betingelsesligning, føjet til dem, der udtrykke, at Kurven skal have de givne Plücker'ske Tal, kan bestemme forskjellige Slags særegne Kurver. Det vil da bero paa de senere tilføjede Betingelser, som nøjere bestemme Systemet, om man faar Kurver henhørende til alle disse forskjellige Slags særegne Kurver, eller kun til nogle af dem, medens andre mangle. Hvilke der findes, vil være forskjelligt for de forskjellige Systemer.

Vi kunne derfor ikke bestemme Begrebet sædvanlige særegne Kurver paa den ovenfor antydede Maade, men maa for at faa en bestemt Definition vilkaarligt vedtage (1) ved sædvanlige særegne Kurver i et System med givne Plücker'ske Tal at forstaa saadanne, som findes i de elementære Systemer, det er saadanne Systemer, hvor de øvrige givne Betingelser ere vilkaarlig valgte givne Punkter af Kurven og Tangenter til samme. Et System af Kurver, hvor disse Punkter og Tangenter ombyttes med det samme Antal givne Kurver, som Systemets Kurver skulle røre, vil da ogsaa kun have sædvanlige særegne Kurver. Det er fremdeles at vente, at Resultater af Undersøgelser over Systemer, der kun indeholde sædvanlige særegne Kurver, paa den ovenfor beskrevne Maade ville kunne anvendes paa Systemer, der ogsaa indeholde usædvanlige særegne Kurver, eller dog, at man ved Overførelse af den Methode, der har været benyttet i saadanne Undersøgelser, vil kunne finde de tilsvarende Resultater. For at finde en Begrænsning kan man i alt Fald begynde med kun at tage Hensyn til de sædvanlige særegne Kurver.

De særegne Kurver, som man først træffer paa, ere saadanne, der indeholde nye Dobbeltpunkter eller Dobbelttangenter, eller hvor et særeget Punkt eller en særegen Tangent er bleven mere sammensat, eller hvor særegne Punkter eller særegne Tangenter ere faldne sammen; men der existerer endnu en Slags særegne Kurver nemlig dem med Mangefoldsgrene, det er saadanne Grene, som skjæres af enhver ret Linie i flere sammenfaldende Punkter, eller hvortil man fra ethvert Punkt kan trække flere sammenfaldende Tangenter. Til denne Slags særegne Kurver hører, foruden andre, nogle af dem, som vi allerede have henregnet

(1) I Bestemmelsen af de sædvanlige Særegenheder ved en enkelt Kurve støder man paa en lignende Vanskelighed: er Kurven given ved sin Punktligning har den i Almindelighed Dobbelt- og Vendetangenter, men ingen særegne Punkter; er den given ved sin Tangentligning har den i Almindelighed Dobbeltpunkter og Spidser. Man vedtager da at betragte saavel de nævnte særegne Tangenter som de nævnte særegne Punkter som sædvanlige Særegenheder.

til den første Klasse, nemlig Kurver med en ny Dobbelttangent (eller med et nyt Dobbeltpunkt), idet vi skulle se, at denne (dette) maa betragtes som en Dobbeltgren af Kurven. Hvad angaar de øvrige Kurver med Mangefoldsgrene, saa have vi, som det skal ses i tredie Afsnit, bestemt dem, som «sædvanligvis» findes i Systemer af Kurver af tredie og fjerde Orden. Da Antallet af de forskjellige Arter af Kurver med Mangefoldsgrene voxer, naar Kurvernes Orden voxer, lader det sig neppe gjøre at drage disse særegne Kurver ind i saadanne almindelige Undersøgelser, som skulle strække sig til Kurver af alle Ordener. Derfor skulle vi i Udviklingen af Formler i andet Afsnit ikke tage Hensyn til andre Kurver med Mangefoldsgrene end de ovenfor nævnte, der tillige høre til den første Klasse af særegne Kurver. Disse Formler ville da 1) være anvendelige paa de talrige Systemer, hvori der ikke forekommer andre Kurver med Mangefoldsgrene, og 2) ved Tilføjelse af supplementære Led kunne gjøres anvendelige paa saadanne, hvor der findes Kurver med Mangefoldsgrene, og her — som før, da vi talte om usædvanlige særegne Kurver — ville omtrent de samme Undersøgelser, som føre til Formlerne, kunne benyttes til Udledelse af de supplementære Led. Dette skulle vi faa Lejlighed til at se i de før nævnte Tilfælde (Kurver af 3die og 4de Orden), hvor vi gjennemføre Bestemmelsen af Kurver med Mangefoldsgrene.

5. Retliniede Grene og Toppunkter. — Idet vi her betragte Kurvernes Bestemmelse som Punktfrembringelser (geometriske Steder for Punkter) og som Tangentfrembringelser (Indhyllingskurver for rette Linier) som ligeberettigede, maa vi tage et særligt Hensyn til saadanne Kurver, hvoraf rette Linier eller Punkter ere Grene. En ret Linie kan nemlig ikke betragtes som Tangentfrembringelse, og en retliniet Gren af en Kurve vil altsaa kun gjøre sig gjældende, naar Kurven betragtes som Punktfrembringelse. Ligeledes kan et Punkt ikke betragtes som Punktfrembringelse, og et Punkt, som er en Gren af en sammensat Kurve, vil altsaa kun gjøre sig gjældende, naar Kurven betragtes som Tangentfrembringelse. Et saadant Punkt kaldes et Toppunkt; dette Ord [1] svarer altsaa dualistisk til Ordet retliniet Gren.

En sammensat Kurve i et System vil saaledes, naar den betragtes som Punktfrembringelse, kunne bestaa af en krum Linie og retliniede Grene, og betragtet som Tangentfrembringelse være sammensat af den samme krumme Linie og Toppunkter. Den for begge Frembringelsesmaader fælles krumme Linie, der godt kan være sammensat af flere

---

[1] Det har sin Oprindelse fra Keglesnit, der reduceres til Dobbeltlinier; enhver Linie gjennem disse Keglesnits Toppunkter (i sædvanlig Betydning) er en Tangent, saa de ogsaa blive Toppunkter i den her brugte Betydning. — Et Toppunkt er overhovedet et Punkt af den Beskaffenhed, at enhver ret Linie derigjennem er en Tangent. Det maa ikke forvexles med Punktgeometriens «isoleret Punkt», som blot er et Dobbeltpunkt (Mangefoldspunkt), hvor begge (alle) Grenene ere imaginære. Da en ret Linie ikke betragtes som en Tangent, blot fordi den gaar gjennem et Dobbeltpunkt, er et saadant i Almindelighed ikke et Toppunkt; men vi skulle se, at «nye» Dobbeltpunkter ere dobbelte Toppunkter.

krumme Linier, kaldes Restkurven. De Plücker'ske Formler, ved hvis Udledelse man benytter begge Frembringelsesmaader, kunne i saa Fald kun anvendes paa Restkurven.

6. Hjælpesætninger om Kurver med retliniede Grene og Toppunkter. — Et System vil i Almindelighed ikke indeholde saadanne Kurver, hvor $n-1$ af de d Dobbeltpunkter ere Skjæringspunkter mellem en enkelt retliniet Gren og en Restkurve. I saa Fald vilde nemlig en ret Linie, som forbandt to af de $n-1$ tilsvarende Dobbeltpunkter paa en nærliggende Kurve, i hvert af disse skjære denne Kurve i to Punkter og desuden skjære den i $n-3$ Punkter, som til Grænsestillinger vilde have de andre $n-3$ Dobbeltpunkter, som paa Grænsekurven falde ud i en ret Linie, altsaa i $n+1$ Punkter. Den vilde altsaa være en Gren af denne Kurve. De nærmestliggende Kurver fik saaledes ogsaa retliniede Grene, og uendelig mange Kurver i Systemet vilde altsaa have saadanne. De Kurver, med hvilke dette var Tilfældet, maatte kunne udelukkes af Systemet og danne et særskilt System. Beviset gjælder ogsaa, naar flere af de $n-1$ Skjæringspunkter falde sammen.

Dette stemmer ogsaa med, hvad man finder ved at søge, hvorvidt der, naar $d \geqq n-1$, virkelig kan existere Kurver, der ere sammensatte paa den angivne Maade, og som tilfredsstille de øvrige opgivne Betingelser. Restkurven bliver af Ordenen $n-1$, og den maa have $d-(n-1)$ Dobbeltpunkter og e Spidser. Bestemmelsen af den og den retliniede Gren afhænger saaledes af

$$\frac{(n-1)(n+2)}{2} - (d-n+1) - 2e + 2 = \frac{n(n+3)}{2} - d - 2e$$

Betingelser, eller af én mere end dem, der skulde bestemme Systemet. De af en ret Linie og en Restkurve sammensatte Kurver, der skulde tilfredsstille Systemets Betingelser, vilde altsaa danne et fulstændigt System for sig. For nu virkelig at udelukke dette System, maa man altsaa, hvis man definerer Systemet ved tre Plücker'ske Tal (n, d og e) samt de øvrige opgivne Betingelser, forudsætte, at kun et endeligt Antal Kurver i Systemet maa indeholde retliniede Grene. Dette er allerede en nødvendig Betingelse for, at de Plücker'ske Ligninger (1) skulle kunne anvendes til af de tre Plücker'ske Tal at bestemme de øvrige. Disse Ligninger vilde i det Tilfælde, som vi forsøgte at antage, give, at Restkurven vel var af Klassen n', men havde $d'-4$ Dobbelttangenter og $e'+3$ Vendetangenter.

Dualitetsprincipet giver, at et System i Almindelighed ikke vil indeholde Kurver, hvor $n'-1$ af de d' Dobbelttangenter ere Tangenter fra et enkelt Toppunkt til en Restkurve, idet vi heller ikke definere Systemet ved tre Plücker'ske

Tal (n', d', e') og de opgivne Betingelser uden at forudsætte, at kun et endeligt Antal Kurver i Systemet indeholde Toppunkter.

Vi se specielt, at en Kurve i Systemet ikke kan faa retliniede Grene eller Toppunkter, uden at der dannes nye særegne Punkter eller Tangenter eller de gamle omdannes, og at det altsaa kun er særegne Kurver i Systemet (se 4), som kunne have retliniede Grene og Toppunkter.

Exempel. I Systemer af Kurver af fjerde Orden med tre Dobbeltpunkter findes der ikke Kurver sammensatte af Kurver af tredie Orden uden særegne Punkter og rette Linier, uagtet man skulde vente at finde saadanne ved til Systemets øvrige Betingelser at føje den enkelte Betingelse, at de tre Dobbeltpunkter skulle ligge ud i en ret Linie. De omtalte sammensatte Kurver kunne heller ikke frembringes ved to Keglesnitsbundter paa samme Maade som andre Kurver af fjerde Orden med tre Dobbeltpunkter.

7. Fortegnelse over de sædvanlige særegne Kurver. — Naar blot d og e samt d' og e' ikke have for smaa Værdier, vil et System «sædvanligvis» — foruden visse Kurver med Mangefoldsgrene — indeholde følgende særegne Kurver, som vi i de følgende N-re skulle beskrive enkeltvis:

$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$	Kurver med et nyt Dobbeltpunkt, blandt hvilke α_0 ere saadanne, hvor ingen af de Grene, der danne dette Dobbeltpunkt, er en ret Linie, α_1 saadanne, hvor den ene, og α_2 saadanne, hvor de begge ere rette Linier;	$\alpha' = \alpha_0' + \alpha_1' + \alpha_2'$	Kurver med en ny Dobbelttangent, blandt hvilke α_0' ere saadanne, hvor ingen af de Grene, som Dobbelttangenten rører, er et Toppunkt, α_1' saadanne, hvor den ene, og α_2' saadanne, hvor de begge ere Toppunkter;
β	Kurver, i hvilke et Dobbeltpunkt er bleven til en Spids;	β'	Kurver, i hvilke en Dobbelttangent er bleven til en Vendetangent;
$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1$	Kurver, i hvilke en Spids er bleven til et Røringspunkt mellem to Grene, og blandt hvilke særligt γ_1 saadanne, hvor den ene af disse Grene er en ret Linie;	$\gamma' = \gamma_0' + \gamma_1'$	Kurver, i hvilke en Vendetangent er bleven til Tangenten i et Røringspunkt mellem to Grene, og blandt hvilke særligt γ_1' saadanne, hvor den ene af disse Grene er et Toppunkt;
$(2d)$	Kurver, hvor to Dobbeltpunkter falde sammen;	$(2d')$	Kurver, hvor to Dobbelttangenter falde sammen;

(de)	Kurver, hvor et Dobbeltpunkt og en Spids falde sammen;	$(d'e')$	Kurver, hvor en Dobbelttangent og en Vendetangent falde sammen;
$(2e)$	Kurver, hvor to Spidser falde sammen;	$(2e')$	Kurver, hvor to Vendetangenter falde sammen;
$(3d)$	Kurver, hvor tre Dobbeltpunkter falde sammen til til et tredobbelt Punkt;	$(3d')$	Kurver, hvor tre Dobbelttangenter falde sammen til en tredobbelt Tangent;
$(2de)$	Kurver, hvor to Dobbeltpunkter og en Spids falde sammen;	$(2d'e')$	Kurver, hvor to Dobbelttangenter og en Vendetangent falde sammen;
$(d2e)$	Kurver, hvor et Dobbeltpunkt og to Spidser falde sammen.	$(d'2e')$	Kurver, hvor en Dobbelttangent og to Vendetangenter falde sammen.

Om de i venstre Spalte anførte Kurver forudsættes det, at den anførte Forandring i Henseende til særegne Punkter hverken medfører nogen yderligere Forøgelse eller Sammenfalden af særegne Punkter eller nogen yderligere Dannelse af retliniede Grene, end udtrykkelig angivet. Den første Forudsætning er nødvendig, for at ikke f. Ex. Kurverne $(3d)$, det er: «de Kurver, hvis Antal betegnes med $(3d)$», skulle henhøre til Kurverne $(2d)$, og den anden Forudsætning — hvis Tilladelighed med Hensyn til $(2d)$, $(3d)$ og $(2de)$ følger af 6 — vil være nødvendig, naar ikke Kurverne β', i hvilke vi ville se, at to Spidser falde sammen, skulle henhøre til Kurverne $(2e)$. Derimod ville de i venstre Spalte anførte Forandringer i Henseende til særegne Punkter ligefrem medføre Forandringer i Henseende til særegne Tangenter og Dannelse af Toppunkter.

Ligeledes forudsættes det om de i højre Spalte anførte Kurver, at den anførte Forandring i Henseende til særegne Tangenter hverken medfører nogen yderligere Forøgelse eller Sammenfalden af særegne Tangenter eller nogen yderligere Dannelse af Toppunkter, end udtrykkelig angivet, men vel Forandringer i Henseende til særegne Punkter og retliniede Grene.

Det vil vise sig, at de særegne Kurver γ_1, $(2d)$, (de), $(2e)$ henholdsvis ere de samme som dem, vi have betegnet med γ', $(2d')$, $(d'e')$, $(2e')$. Vi have altsaa

$$\gamma_1 = \gamma_1', \ (2d) = (2d'), \ (de) = (d'e'), \ (2e) = (2e') \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

8. Plücker'ske Tal til Restkurverne α, β, γ, α', β', γ'. — Det vil vise sig, at alle de her nævnte Kurver indeholde enten Toppunkter eller retliniede Grene eller begge Dele. For Kurverne α, β og γ giver Definitionen ligefrem Restkurvens Orden, samt Antallene af dens Dobbeltpunkter og Spidser. Restkurven α_1 bliver saaledes, idet den rette

Linie udsondres, af Ordenen $n-1$; af dens Skjæringspunkter med den rette Linie er det ene et nyt Dobbeltpunkt, de øvrige $n-2$ derimod høre til de d, som findes paa enhver Kurve i Systemet, saa Restkurven beholder $d-(n-2)$ af disse; Restkurven beholder alle e Spidser. Ligeledes kjender man Klassen af og Antallene af Dobbelttangenter og Vendetangenter til Restkurverne α', β', γ'. De Plücker'ske Formler ville da give alle disse Restkurvers Plücker'ske Tal. Disse indeholdes i efterfølgende Tavle:

	Orden.	Klasse.	Dobbeltpunkter.	Spidser.	Dobbelttangenter.	Vendetangenter.
α_0	n	$n'-2$	$d+1$	e	$d'-2(n'-6)$	$e'-6$
α_1	$n-1$	$n'-2$	$d-(n-2)$	e	$d'-2(n'-4)$	$e'-3$
α_2	$n-2$	$n'-2$	$d-2(n-2)$	e	$d'-2(n'-2)$	e'
β	n	$n'-1$	$d-1$	$e+1$	$d'-(n'-4)$	$e'-2$
γ_0	n	$n'-1$	$d+2$	$e-1$	$d'-(n'-5)+2$	$e'-4$
γ_1	$n-1$	$n'-1$	$d-(n-3)$	$e-1$	$d'-(n'-3)$	$e'-1$
α_0'	$n-2$	n'	$d-2(n-6)$	$e-6$	$d'+1$	e'
α_1'	$n-2$	$n'-1$	$d-2(n-4)$	$e-3$	$d'-(n'-2)$	e'
α_2'	$n-2$	$n'-2$	$d-2(n-2)$	e	$d'-2(n'-2)$	e'
β'	$n-1$	n'	$d-(n-4)$	$e-2$	$d'-1$	$e'+1$
γ_0'	$n-1$	n'	$d-(n-5)+2$	$e-4$	$d'+2$	$e'-1$
γ_1'	$n-1$	$n'-1$	$d-(n-3)$	$e-1$	$d'-(n'-3)$	$e'-1$

At nu virkelig alle disse Kurver maa regnes med blandt sædvanlige særegne Kurver — naar blot Antallene af særegne Tangenter eller særegne Punkter ikke ere for smaa — vil vise sig, naar man tæller de Betingelser, som de fuldstændige Kurver α, β og γ betragtede som Punktdannelser og α', β' og γ' betragtede som Tangentdannelser kunne underkastes. Man finder f. Ex., at Kurverne α_1 afhænge af

$$\frac{(n-1)(n+2)}{2}-(d-(n-2))-2e+2=\frac{n(n+3)}{2}-d-2e-1$$

Betingelser (som godt kunne være elementære, se 4), og det samme Antal finder man for de andre. Det vil fremdeles blive paavist, at de fuldstændige Kurver ere i Besiddelse af alle de særegne Tangenter og Punkter, som ere bortfaldne for Restkurvens Vedkommende.

Tavlen angiver ogsaa de Minimumsværdier, som de Plücker'ske Tal til en vilkaarlig Kurve i Systemet kan have, naar dette virkelig skal indeholde de paagjældende særegne Kurver. For det første maa nemlig alle Restkurvens Plücker'ske Tal være positive, og dernæst vil det blive vist, at, naar Restkurverne γ_0 have $d'-n'+7$ Dobbelttangenter, beror dette paa, at $n' - 5$ af de d' Dobbelttangenter til den fuldstændige Kurve ikke ere Dobbelttangenter til Restkurven, medens denne har faaet 2 nye, som ikke høre med til de d'. Derfor maa man i dette Tilfælde have $d' \geqq n' - 5$. Ligeledes vil en af Betingelserne for, at et System skal indeholde en Kurve γ_0', være $d \geqq n - 5$. Dette er betegnet ved den Maade, hvorpaa vedkommende Tal ere opførte i Tavlen.

At der ikke vil kunne være Tale om, at en Kurve ved Opløsning i Grene hvoriblandt rette Linier sædvanligvis skulde kunne faa to nye Dobbeltpunkter, eller paa én Gang faa et nyt Dobbeltpunkt og faa en Spids omdannet til Røringspunkt mellem to Grene o. s. v., følger af, at Antallet af Betingelser, som man kunde underkaste saadanne Kurver, vilde blive for lille.

9. Kurverne α betragtede som Tangentfrembringelser og Kurverne α' betragtede som Punktfrembringelser. — Idet en Restkurve α kun er af Klassen $n' - 2$, ere to af de Tangenter, som man fra et vilkaarligt Punkt kan trække til en Kurve i Systemet, ikke indbefattede blandt Tangenterne til denne Restkurve. De manglende to Tangenter maa falde sammen i Linier gjennem det nye Dobbeltpunkt, som altsaa bliver et dobbelt Toppunkt, der maa udgjøre en Del af den fuldstændige Kurve α. De $2(n' - 6)$, $2(n' - 4)$ eller $2(n' - 2)$ Dobbelttangenter, som Restkurverne α_0, α_1 eller α_2 have mistet, falde sammen to og to i Tangenterne fra det nye Toppunkt til Restkurven (Tangenterne i selve dette Punkt ikke medregnede).

I Kurverne α_0, hvor begge det nye Dobbeltpunkts Grene høre med til Restkurven, har fremdeles den fuldstændige Kurve 6 Vendetangenter mere end Restkurven. Da Vendetangenter skulle skjære Kurven i tre sammenfaldende Punkter, kunne de 6 Vendetangenters Grænsestillinger kun være Tangenterne til Restkurvens to Grene gjennem Dobbeltpunktet, og i hver af disse ere altsaa 3 Vendetangenter faldne sammen. — For Kurverne α_1 falde, i Overensstemmelse hermed, tre Vendetangenter sammen i Tangenten til Restkurven i det nye Toppunkt, og de fundne Plücker'ske Tal vise, at disse ere de eneste blandt de e' Vendetangenter til den fuldstændige Kurve, som ere gaaede tabt for Restkurven. At den retliniede Gren af en Kurve α_1 ikke kan være Grænsestilling for en Vendetangent, følger forøvrigt af, at en Vendetangent til en foranderlig Kurve i Systemet, som nærmede sig til denne Grænse, vilde skjære Kurven dels i 3 sammenfaldende Punkter dels i $n - 2$ Punkter, som til Grænsestilling havde de $n - 2$ gamle Dobbeltpunkter, hvori Kurven α_1's retliniede Gren skjærer Restkurven, altsaa ialt i $n + 1$ Punkter. Vendetangenten maatte altsaa være en Gren af den Kurve, hvortil den hørte, eller der maatte være uendelig mange Kurver i Systemet med retliniede Grene, hvilket strider mod vore Forudsætninger (se 6). — I Kurverne α_2, hvor Restkurven slet ikke gaar igjennem det nye Toppunkt, har denne beholdt alle e' Vendetangenter.

Man finder paa samme Maade ved Betragtning af de Plücker'ske Tal til Restkurven α', at en fuldstændig Kurve α_0', naar den betragtes som Punktfrembringelse, er sammensat af Restkurven og en Dobbeltlinie, der falder i dennes nye Dobbelttangent, at to af den fuldstændige Kurves Dobbeltpunkter falde sammen i hvert af denne Dobbeltlinies Skjæringspunkter med Restkurven, og tre af dens Spidser i hvert af Røringspunkterne; at ligeledes en fuldstændig Kurve α_1' eller α_2' er sammensat af Restkurven og en Dobbeltlinie, der i første Tilfælde rører Restkurven i ét Punkt, hvor tre Spidser falde sammen, og at ogsaa i begge disse Tilfælde to Dobbeltpunkter falde sammen i hvert af Dobbeltliniens Skjæringspunkter med Restkurven.

10. Nærmere Undersøgelse af Kurverne α_0. — Punktligningen for en Kurve α_0 vil, naar vi tage det nye Dobbeltpunkt til Begyndelsespunkt O og Tangenterne til Koordinataxer (¹), blive af Formen

$$xy + \varphi_3 + \varphi_4 + \ldots = 0,$$

idet φ_r betegner en homogen Funktion af r'te Grad af x og y. Vi kunne antage, at φ_3 ikke bliver Nul, for $x = 0$ eller $y = 0$, da man saa havde med den usædvanlige Særegenhed at gjøre, hvor en af Tangenterne i Dobbeltpunktet var en Vendetangent. Vi have da i 2 set, at de nærmest denne Kurve liggende Kurver i Systemet kunne fremstilles ved Fællesligningen

$$xy + \varphi_3 + \varphi_4 + \ldots + k\psi = 0, \qquad \text{(II)}$$

hvor ψ er en Funktion af x, y og k, der kan udvikles i en Række efter stigende Potenser af k med hele og positive Exponenter, samt at Konstanterne i denne Række ville have fuldkommen bestemte Værdier, naar vi — i det Tilfælde, at den samme Kurve maatte forekomme flere Gange i Systemet — blot betragte en enkelt Forekomst. Foreløbig skulle vi desuden forudsætte, at $k = 0$, $x = 0$, $y = 0$ gjøre $\psi = a$, hvor $a \gtrless 0$.

Første Led i de Rækker efter stigende Potenser af k, der skulle udtrykke Koordinaterne til de Skjæringspunkter mellem Kurven (II) og en ret Linie gjennem O, der for $k = 0$ falde i O, bestemmes ved Ligningen

$$xy + ka = 0. \qquad \text{(III)}$$

(¹) x og y kunne betegne Parallelkoordinater eller almindelige Trekantkoordinater, ɔ: et Punkts Afstande fra Linierne $x = 0$ og $y = 0$, dividerede med dets Afstande fra en tredie Linie $z = 0$, og multiplicerede med vilkaarlige Konstanter. I begge Tilfælde kan man gjøre Ligningerne homogene ved for x og y at skrive $\frac{x}{z}$ og $\frac{y}{z}$. — Linierne x og y ere imaginære, hvis det nye Dobbeltpunkt er et isoleret Punkt; i saa Fald vil Ligning (II) ved Henførelse til reelle Axer gjennem samme Punkt beholde sin Form paa det nær, at xy ombyttes med et reelt Polynomium af anden Grad. Hvis selve det nye Dobbeltpunkt er imaginært, er ej blot x og y (eller dog en af disse Størrelser) imaginære, men ogsaa Punktet $x = 0$, $y = 0$. De nærmest liggende Kurver blive da imaginære, men selve Kurven α kan være reel (se Exemplet i 13). Dette vil ogsaa finde Sted, naar det nye Dobbeltpunkt er reelt, naar blot ψ indeholder imaginære Konstanter.

Det viser sig, at disse Koordinater, og dermed Afstandene fra O til de derved bestemte Punkter, i Almindelighed for lim. $k = 0$ blive uendelig smaa af Ordenen $\frac{1}{2}$. De ville — idet vi forudsætte, at O er et reelt Punkt, og at ψ ikke indeholder imaginære Konstanter — gaa over fra at være reelle til at blive imaginære eller omvendt, naar k gjennem Nul skifter Fortegn, altsaa naar en foranderlig Kurve i Systemet passerer den særegne. Afstandene fra O til de Skjæringspunkter med $x = 0$ eller $y = 0$, der falde sammen med O for $k = 0$, blive derimod kun af Ordenen $\frac{1}{3}$, hvoraf — naar Dobbeltpunktet har reelle Grene — vil følge, at ét af dem er reelt, hvad enten $k \gtrless 0$. Selve Kurven α_0 vil derimod ikke skjære nogen nærliggende i noget Punkt, som for $k = 0$ falder i O, ligesom to nærliggende Kurver heller ikke skjære hinanden i et saadant Punkt. Man ser da, at, naar Dobbeltpunktets Grene ere reelle, det ene Par deraf dannede Topvinkler for $k > 0$, det andet for $k < 0$ vil indeholde Grene af en nærliggende Kurve, men at, naar Punktet O er et isoleret Punkt af Kurven α_0, en ovalformet Gren af en nærliggende Kurve vil omslutte O for k positiv (negativ), medens ingen reel Gren nærmer sig til O for k negativ (positiv).

Idet nu Afstandene fra O til de Punkter af Kurven (II), der for $k = 0$ falde sammen med O, i Almindelighed ere uendelig smaa af Ordenen $\frac{1}{2}$ og aldrig af højere Orden, kan man slutte, at det samme maa være Tilfældet med Afstandene til to af Skjæringspunkterne med en Kurve, hvoraf en enkelt Gren gaar gjennem O uden at røre nogen af Axerne, med O's Afstande fra to af Tangenterne fra et Punkt, som ikke ligger paa nogen af Axerne, eller fra to saadanne Dobbelttangenter, som for $k = 0$ falde sammen i en Tangent fra O til Restkurven. Alt dette kunde man ogsaa finde ved en gjennemført analytisk Behandling.

Naar man paa sædvanlig Maade søger Røringspunkterne for Vendetangenterne til en Kurve i Systemet, finder man, at disse bestemmes som Skjæringspunkterne med en Kurve, (Hesse's Kurve[1]), hvis Ligning ogsaa bliver af Formen

$$xy + \varphi_3' + \varphi_4' \dots + k\,\psi' = 0, \tag{IV}$$

hvor φ' og ψ' have samme Betydninger som φ og ψ i (II). Af Ligningerne (II) og (IV) kan man udlede, at de søgte Punkter ogsaa maa ligge paa Kurven

$$\varphi_3 - \varphi_3' + \varphi_4 - \varphi_4' + \dots + k(\psi - \psi') = 0.$$

De Punkter af denne Kurve, som falde sammen med O for $k = 0$, have Afstande fra O, som ere uendelig smaa af Ordenen $\frac{1}{3}$ eller af en endnu lavere Orden, naar stedse k betragtes som uendelig lille af første Orden, og dette maa saaledes ogsaa være Tilfældet med Røringspunkterne for de Vendetangenter til (II), som for $k = 0$ falde sammen med Axerne, idet disse Røringspunkter have O til Grænsestilling. Disse Punkter maa da, ifølge det som før er sagt om Kurven (II), være saaledes bestemte, at enten lim. $\frac{x}{y} = 0$ eller

(1) Ligningen for Hesse's Kurver findes ved at gjøre Ligningen for den givne Kurve homogen og dernæst sætte Determinanten af dens anden Differentialkoefficienter lig Nul.

lim. $\frac{y}{x} = 0$, og ifølge 9 maa hver af disse Bestemmelser give 3 Punkter. Vi skulle nøjere undersøge dem, for hvilke lim. $\frac{y}{x} = 0$.

Disse Punkters Abscisser x maa, da lim. $\frac{y}{x} = 0$, være af samme Orden som deres Afstande fra O, altsaa af Ordenen $\frac{1}{3}$ eller en lavere Orden. I sidste Tilfælde vilde x udviklet i Række efter Potenser af k begynde med et Led, hvis Exponent var mindre end $\frac{1}{3}$, og hvori Nævneren altsaa var større end 3. Følgelig fik allerede dette Led og altsaa hele Udtrykket for x mere end 3 Værdier, hvilket, som vi have sét, ikke vil være Tilfældet. De søgte Værdier af x blive altsaa af Ordenen $\frac{1}{3}$, og Rækkeudviklingen for x efter stigende Potenser af k vil begynde med et Led af Formen $A.k^{\frac{1}{3}}$, hvor A er en konstant Størrelse. Ligning (II) giver derefter en Rækkeudvikling for y, som begynder med $B.k^{\frac{2}{3}}$, hvor $B = -\frac{A}{a}$. Ligningerne for Tangenterne til Kurven (II) i de saaledes bestemte Punkter $(Ak^{\frac{1}{3}} + \ldots, Bk^{\frac{2}{3}} + \ldots)$ eller for de søgte Vendetangenter blive da af Formen

$$\left.\begin{array}{l} Xx + Yy + Z = 0, \\ \text{hvor} \quad X = Ck^{\frac{2}{3}} + \ldots,\ Y = Ak^{\frac{1}{3}} + \ldots,\ Z = Dk + \ldots, \end{array}\right\} \quad \text{(V)}$$

idet C og D ere nye konstante Størrelser. De Rækkeudviklinger efter stigende Potenser af k, som man saaledes finder for X, Y, Z — Vendetangenternes Liniekoordinater — saavel som Rækkeudviklingerne for Røringspunkternes Koordinater x og y, ville kun indeholde Potenser med hel Exponent af $k^{\frac{1}{3}}$ og fuldstændig bestemte Koefficienter([1]), da de ellers vilde bestemme mere end 3 Vendetangenter. Disse Rækkeudviklinger kunne bruges, saalænge k er lille nok til, at de ere konvergente. — Ligningerne (V) blive for $k = 0$ til $y = 0$, som altsaa er den Linie, hvori de tre Vendetangenter, hvis Røringspunkter bestemmes ved lim. $\frac{y}{x} = 0$, falde sammen, medens de tre, hvis Røringspunkter bestemmes ved lim. $\frac{x}{y} = 0$, falde sammen i $x = 0$.

Hvis nu det nye Dobbeltpunkt har reelle Grene (og ψ som før forudsættes reel), maa mindst den ene af de tre Vendetangenter, som nærme sig til Grænsen $y = 0$, være reel. Koefficienterne i Rækkerne maa altsaa være reelle — eller kunne gjøres reelle ved at trækkes sammen med Potenser af den imaginære Faktor til $\sqrt[3]{k}$, som indgaar i den Værdi af $k^{\frac{1}{3}}$, som giver den reelle Opløsning. Den reelle Vendetangent bliver da bestemt ved den reelle Værdi af $k^{\frac{1}{3}}$, medens de imaginære Værdier af $k^{\frac{1}{3}}$ give imaginære Opløsninger.

([1]) Koefficienterne kunne godt være irrationale; men de Værdier, som netop svare til de tre Vendetangenter, vi her betragte, ville være fuldkommen bestemte.

Altsaa vil, saavel før som efterat k har passeret 0, kun den ene af de tre Vendetangenter være reel.

Ligningen (V) vil bestemme det System af rette Linier, som for tilstrækkelig smaa Værdier af k dannes af de Vendetangenter til Kurver φ i det givne System, der have $y = 0$ til Grænsestilling. Ved i denne Ligning at sætte $k^{\frac{1}{3}} = h$, faa vi Systemet saaledes bestemt, at hver Værdi af h kun giver én Linie i Systemet. Indhyllingskurven for dette System bliver en enkelt Gren af Indhyllingskurven (c') for Vendetangenterne til Systemets Kurver, som strækker sig til alle de Vendetangenter, for hvilke Rækkerne (V) ere konvergente. De tre Vendetangenter til en Kurve i Systemet, som have $y = 0$ til Grænsestilling, blive saaledes ikke Tangenter til forskjellige Grene af denne Indhyllingskurve, men kun forskjellige Tangenter til samme Gren. Dette vilde aabenbart være umuligt, naar alle tre vare reelle.

Det er altsaa kun en enkelt Gren af Indhyllingskurven for Vendetangenterne, der rører Linien $y = 0$, og man vil se, at $y = 0$ kun er en simpel Tangent til denne Gren. Benyttes nemlig Ligningen (V), der efter Bortforkortning af den fælles Faktor $k^{\frac{1}{3}} = h$ kan skrive:

$$(Ch + \ldots)x + (A + \ldots)y + (Dh^2 + \ldots) = 0,$$

til Bestemmelse af Vendetangenter gjennem Punktet $(x_1, 0)$, faas

$$Cx_1 h + Eh^2 + \ldots = 0,$$

som kun giver én Rod $h = 0$. Røringspunktet med Indhyllingskurven maa bestemmes ved den Værdi af x_1, for hvilken endnu en Værdi af h bliver 0, altsaa ved $x_1 = 0$, og bliver følgelig selve det nye Dobbeltpunkt O. — De her anførte Sætninger om Tangenten $y = 0$ i dette Dobbeltpunkt gjælde selvfølgelig ogsaa om $x = 0$.

Udtrykkene for Koordinaterne til Vendetangenternes Røringspunkter vise paa lignende Maade, at ogsaa Kurven (q') [se 3] har simpel Røring med det nye Dobbeltpunkts Grene. — Da Afstanden mellem saadanne to Dobbelttangenter til Kurven (II), som for $k = 0$ falde sammen i en Tangent fra O til Restkurven, ere uendelig smaa af Ordenen $\frac{1}{2}$ ved O, men af første Orden ved Røringspunktet med Restkurven, kan man slutte, at saavel Kurven (b') som (p') rører Restkurven i dette sidste Punkt.

Allerede et System af Trediegradskurver uden særegne Punkter leverer Exempel paa Kurverne α_0. En Kurve i et saadant System har 9 Vendetangenter, af hvilke de 3 ere reelle, medens en Trediegradskurve med et Dobbeltpunkt med reelle Grene har 3 Vendetangenter, hvoraf 1 er reel. Af de 6 Vendetangenter, som gaa tabt ved Dannelsen af Dobbeltpunktet, vare altsaa de 2 reelle — i Overensstemmelse med det ovenfor udviklede. Er derimod Dobbeltpunktet paa Kurven α_0 et isoleret Punkt, ere de Vendetangenter, som tabes, imaginære, hvilket stemmer med, at en Trediegradskurve med isoleret Punkt har 3 reelle Vendetangenter[1].

---

[1] Man kan, som Plücker gjør det i andet Afsnit 64 af *Theorie der algebraischen Curven*, fra de her omtalte Egenskaber ved Kurver af tredie Orden slutte sig til Antallene af de reelle og imaginære Vendetangenter, som falde sammen paa en vilkaarlig Kurve α_0.

Paa Fig. 1 ere 1 og 3 to Kurver i et System, mellem hvilke 2 er en Overgangskurve α_0. Idet en Kurve i Systemet varierer fra 1 gjennem 2 til 3, ville to af Tangenterne fra P begynde med at være reelle, falde sammen i PO og dernæst blive imaginære. c'_2 er en af Tangenterne til 2 i Dobbeltpunktet O, c'_1 og c'_3 ere de reelle Vendetangenter til 1 og 3, der have c'_2 til Grænsestilling og røre den Gren af Vendetangenternes Indhyllingskurve, der i O rører c'_2.

At baade Kurven 1 og Kurven 3, naar de ligge tilstrækkelig nær ved 2, nødvendigvis begge maa have to reelle Vendetangenter, der nærme sig til Tangenterne til 2 i O, viser sig forøvrigt ved selve Tegningen af Figuren, idet disse Kurver i en vis Afstand fra O, vende Konkaviteten samme Vej som 2. Man ser da tillige, at de to reelle Vendetangenter røre samme Gren af den ene (her 1), men de forskjellige Grene af den anden (3).

Man kan ogsaa ved den blotte Figurbetragtning overbevise sig om, at ikke fler end én Vendetangent til 1 eller 3, som nærmer sig til en Tangent til 2 i O, er reel. Dette vil man se, naar man tager i Betragtning, at, da ingen ret Linie gjennem O skjærer Kurven 2 i mere end tre Punkter, som falde sammen i O, kan heller ingen med Kurven 1 forbunden ret Linie skjære denne Kurve i mere end tre Punkter, som falde sammen med O, samtidig med at 1 falder sammen med 2. Man vil nemlig ikke kunne faa flere reelle Vendetangenter til 1 end de alt angivne, uden at nogen af dem endnu skjærer Kurven i et Punkt, der ligesom Røringspunktet har O til Grænsestilling.

11. Fortsat Undersøgelse af Kurverne α_0[1]. — I 10 forudsattes det om Ligning (II)

$$xy + \varphi_3 + \varphi_4 + \ldots + k\psi = 0,$$

at ψ ikke blev 0 for $x = 0$, $y = 0$, $k = 0$. Vi skulle nu undersøge Systemet i det Tilfælde, hvor denne Forudsætning borttages, og hvor ψ altsaa ikke indeholder noget Led af 0'te Grad med Hensyn til x, y og k. I saa Fald faa navnlig Leddene af første Grad $ax + by + ck$ Betydning. Vi skulle nøjes med at behandle det Tilfælde, hvor i alt Fald $c \gtrless 0$.

Første Led i de Rækker, der bestemme de Skjæringspunkter med rette Linier gjennem O, som for $k = 0$ falde i O, findes ved Ligningen

$$xy + k(ax + by) + k^2c = 0, \tag{VI}$$

idet vi foreløbig ikke tage Hensyn til Skjæringspunkter med Axerne. Disse Punkters Afstande fra O blive altsaa for lim. $k = 0$ uendelig smaa af første Orden, hvoraf vil følge, at de enten ere reelle eller imaginære baade før og efter, at k har passeret Nul. Overgangen mellem de Linier, der have reelle, og dem, der have imaginære Skjæringspunkter, dannes af Linierne

$$4cxy = (ax + by)^2. \tag{VII}$$

Disse Linier, der blive Grænsestillinger for Tangenter fra O til den ved k bestemte Kurve,

---

(1) Enkelte af de her i 11 behandlede Forhold ere undersøgte af Dr. J. Petersen i en Afhandling «Bidrag til Enveloppetheorien» i Tidsskrift for Mathematik 1872 S. 81.

blive Tangenter i O til Indhyllingskurven for Systemets Kurver, som altsaa faar et Dobbeltpunkt i O. (Man ser ogsaa let, at de faa den i 2 omtalte Egenskab ved Tangenter til Indhyllingskurven).

Ligning (VI) og den, som dannes deraf ved at ombytte k med k , kan ogsaa benyttes til Bestemmelse af første Led i Udtrykkene for Koordinaterne til de to Skjæringspunkter mellem to Kurver i Rækken, som for $k = 0$, $k_1 = 0$ falde i O.

Naar man i et Systems Fællesligning indsætter et givet Punkt (x, y), tjener den til Bestemmelse af de Værdier af k, som bestemme de Kurver i Systemet, som gaa gjennem (x, y). Ligning (VI) kan da benyttes til Bestemmelse af Leddene af første Grad i Rækkeudviklingerne af Udtrykkene for de Værdier af k, som nærme sig til Nul, samtidig med at Punktet (x, y) nærmer sig til O. Man finder to saadanne Udtryk. Ligning (VII) bliver, som man maatte vente, Betingelsen for, at disse første Led skulle blive ligestore.

Ligning (VI) kan kun bruges ved Bestemmelser af det ene Skjæringspunkt med en af Axerne, idet den f. Ex. for $y = 0$ kun giver $x = -k\frac{c}{a} + \ldots$; for at bestemme flere Skjæringspunkter maa man endnu medtage Leddet φ_3, hvorved endnu faas to Abscisser, som blive uendelig smaa af Ordenen $\frac{1}{2}$.

Idet de Led i Ligningen for Hesse's Kurve, som ere af lavere end tredie Orden med Hensyn til x, y og k, ere

$$xy + k(ax + by) + k^2c',$$

hvor blot c' er en ny Konstant, ville Røringspunkterne for de Vendetangenter, som falde sammen med $y = 0$ for $k = 0$, bestemmes ved $x = Ak^{\frac{2}{3}} + \ldots$, $y = -ak + \ldots$; Kurven (q') vil saaledes have en Spids i Punktet O; Tangenten bliver $y = 0$. — Ligningen for en af Vendetangenterne bliver efter Bortforkortning af $k^{\frac{2}{3}}$

$$(Ck^{\frac{2}{3}} + \ldots)\,x + (A + \ldots)\,y + aAk + \ldots = 0,$$

som viser, at Linien $y = 0$ i O er en Vendetangent til Vendetangenternes Indhyllingskurve (c'). — En Tangent fra O til Restkurven bliver her en Dobbelttangent til Dobbelttangenternes Indhyllingskurve (b'), og i Almindelighed vil intet af dens Røringspunkter med (b') falde i Røringspunktet med Restkurven.

Systemets Udseende, naar selve Punktet O er reelt, og naar ψ er reel, fremgaar let af de her udledte Egenskaber. Hvis Punktet O er et isoleret Punkt paa Indhyllingskurven (Linierne (VII) imaginære), ville i (VI) alle reelle Værdier af $\frac{y}{x}$ enten give lutter reelle eller lutter imaginære Værdier af $\frac{x}{k}$. Er da Punktet O ogsaa et isoleret Punkt paa Kurven α_0 (i hvilket Tilfælde Ligningen, naar den gjøres reel ved Henførelse til reelle Axer gjennem O, beholder sin Form paa det nær, at xy ombyttes med et stedse positivt Polynom af anden Grad), maa de nærmest O liggende Grene af Systemets Kurver enten (for $c > 0$) alle være imaginære eller ($c < 0$) alle være Ovaler, der omslute O (Fig. 2), og blandt hvilke de, der svare til positive k, helt omslutte hverandre, og de, der svare til negative k, gjøre det samme. Har derimod Kurven α_0 reelle Grene gjennem O, maa dette Punkt ligge paa samme Side af begge Grene af en nærliggende Kurve. Fig. 3.

Ere Indhyllingskurvens Grene reelle, men Kurven α_0's Grene imaginære, faas en Række Ovaler, der røre Indhyllingskurvens Grene og for $k = 0$ svinde ind til Punktet O Fig. 4. Hvis derimod ogsaa Kurven α_0's Grene ere reelle, viser Ligning (VII), at begge Indhyllingskurvens Grene falde i det samme Par Topvinkler dannede af α_0's Grene, da de to Værdier af $\frac{y}{x}$ begge ere $\gtrless 0$, eftersom $c \gtrless 0$. Det samme opdager man let ved at forsøge at danne en Tegning. Fig. 5 forestiller et saadant System, hvor a er Indhyllingskurven og 2 er Grænsekurven α_0.

Paa Fig. 3 og 5 er c'_2 en Vendetangent til Vendetangenternes Indhyllingskurve, c'_1 og c'_3 nærliggende Stillinger af Tangenter til denne Kurve.

Ligning (VI) viste os, at der i det her undersøgte System gjennem et Punkt (x, y), som nærmer sig til at falde sammen med O, gaar to Kurver, som nærme sig til Grænsekurven α_0, medens man i det i 10 undersøgte System kun finder én saadan. Idet Tangenterne i Dobbeltpunktet $x = 0$ $y = 0$ her i 11 ere Vendetangenter til Vendetangenternes Indhyllingskurve, ses det ogsaa, at to Kurver i Systemet, som nærme sig til Grænsekurven, ville være bestemte ved, at en Vendetangent skal gaa gjennem et Punkt, som nærmer sig til en af disse Linier; i Systemet i 10 vare disse derimod simple Tangenter til Vendetangenternes Indhyllingskurve, og den anførte Opgave fik kun én Opløsning. En ret Linie, der nærmer sig til at gaa gjennem O, vil i det her betragtede System røre to Kurver, der nærme sig til Grænsekurven, i Systemet i 10 kun én. Overhovedet vil man, naar Bestemmelsen af saadanne Kurver i de her i 11 og i 10 undersøgte Systemer, der for $k = 0$ falde sammen med Grænsekurven α_0, beror paa de Led, som ere angivne i (VI) og (III), eller i alt Fald paa Led af Systemets Ligning, der som disse hæve sig henholdsvis til anden og første Grad med Hensyn til k, faa dobbelt saamange Opløsninger for det i 11 behandlede System som for det i 10 behandlede. Idet vi nu ved Dannelsen af vore Formler (andet Afsnit) kun faa med saadanne Bestemmelser at gjøre, behøve vi ikke særskilte Navne for Antallene af de særegne Kurver, til hvilke Systemernes Kurver dog nærme sig paa forskjellig Maade; men vi kunne indbefatte dem alle i Antallet α_0, saaledes at en særegen Kurve af den i 10 beskrevne Art (fremstillet ved den almindelige Ligning (II)) tælles én Gang i dette Tal, men en særegen Kurve af den her i 11 beskrevne Art (fremstillet ved en Ligning (II), i hvilken $x = 0$, $y = 0$, $k = 0$ gjør $\psi = 0$) tælles to Gange. Derfor maa man ikke tro, at to paa hinanden følgende Kurver i Systemet falde sammen i de sidst omtalte Kurver. Dette er kun Tilfældet, naar k er Faktor i ψ (se 2). — Til de Systemer, der dannes ved den yderligere Specialisation af Ligning (II), som fremkommer ved, at Koefficienten c til k i ψ bliver Nul, vil der kunne tages Hensyn ved at indbefatte deres ved $k = 0$ bestemte særegne Kurver 3, 4 . . Gange i α_0, hvorved vore Formler ogsaa blive anvendelige paa dem. (Smlgn. Undersøgelsen af Kurver med Mangefoldsgrene i tredie Afsnit).

12. Kurverne α_0's Forekomst i elementære Systemer. — Naar man i et System finder en Kurve med et nyt Dobbeltpunkt og dernæst vælger Koordinatsystemet og bestemmer Parameteren k saaledes som antaget i 10 og 2, vil Fællesligningen for Systemets Kurver antage Formen (II), hvor i Almindelighed $x = 0$, $y = 0$, $k = 0$ ikke gjør $\psi = 0$. Det kunde da synes, som om et System i Almindelighed ikke vilde indeholde saadanne særegne Kurver α_0, til hvilke Systemets Kurver nærme sig paa den Maade, der er beskreven i 11. Dette vil dog være Tilfældet med ethvert System, til hvis givne Betingelser hører den at skulle røre en given Kurve. Man kan nemlig finde en Kurve, som tilfredsstiller Systemets øvrige Betingelser, men i Stedet for at røre den givne Kurve har et nyt Dobbeltpunkt beliggende paa denne. Da det nye Dobbeltpunkt er et dobbelt Toppunkt, vil denne Kurve nemlig ogsaa tilfredsstille den Betingelse at røre den givne Kurve. Ligeledes vil der til et System af Kurver, som blandt andet skulle røre to givne Kurver, høre saadanne hvor de nævnte to Betingelser ere opfyldte ved, at de have nye Dobbeltpunkter i et Skjæringspunkt mellem de givne Kurver. I begge de her nævnte Tilfælde gaar Kurvesystemets Indhyllingskurve gjennem de nye Dobbeltpunkter, hvilket kun da er Tilfældet med Systemet (II), naar som i 11 $x = 0$, $y = 0$, $k = 0$ gjør $\psi = 0$. At vi ogsaa her, hvor vi hovedsagelig beskjæftige os med «sædvanlige» Særegenheder (se 4), maa tage Hensyn til de her anførte Tilfælde, er klart; thi de indtræde i alle saadanne elementære Systemer, hvor mindst én eller to Tangenter til Systemets Kurver ere givne.

Naar nu et System indeholder en Kurve, der i Stedet for at røre en given Kurve C har et nyt Dobbeltpunkt beliggende paa denne, og man vælger Koordinatsystemet som i 10—11, bliver Ligningen altsaa en saadan Ligning af Formen (II), som ikke indeholder Led af lavere end anden Grad med Hensyn til x, y og k. Tangenten til Kurven C i Begyndelsespunktet bliver en af Tangenterne til Systemets Indhyllingskurve i dette Punkt, hvilke bestemtes ved (VII). Er nu (x_1, y_1) et vilkaarligt Punkt af denne Tangent, kan Konstanten c i Ligning (VI), der indeholder Leddene af anden Grad i Systemets Ligning, udtrykkes ved Konstanterne a og b ved

$$4 c x_1 y_1 = (a x_1 + b y_1)^2.$$

Hvis det nye Dobbeltpunkt ligger paa to af de Kurver, som Systemets Kurver skulle røre, kjender man begge Tangenter til Indhyllingskurven i Punktet O, hvorved endnu faas Ligningen

$$4 c x_2 y_2 = (a x_2 + b y_2)^2.$$

Disse to Ligninger give to Værdier for $\frac{a}{b}$ og svarende til hver af disse én Værdi af c. (De absolute Værdier af a og b ere ligegyldige, da Systemet ikke forandres, ved at k multipliceres med en af k uafhængig Konstant). Den Omstændighed, at der kommer to Opløsninger, viser, at en Kurve, som har et nyt Dobbeltpunkt i Skjæringspunktet mellem to Kurver, som Systemets Kurver skulle røre, og som tilfredsstiller Systemets øvrige Betingelser, forekommer to Gange i Systemet. Da man faar en dobbelt Bestemmelse af Koefficienterne i Systemets Ligning, kunde det se ud, som om selve Systemet delte sig i to indbyrdes uafhængige Systemer. Men herved maa erindres, at man ved at bringe Systemets Ligning paa Formen (II) tillige kræver, at den særegne Kurve skal svare til Værdien $k = 0$. Naar nu de to sammenfaldende særegne Kurver, vi her betragte, ikke kunne bringes til at svare til samme Værdi af k, er det klart, at Ligningen maa blive forskjellig, eftersom man vil, at den ene eller den anden af de to Kurver skal svare til $k = 0$. Vælges den Ligning, hvor $k = 0$ bestemmer den ene af de sammenfaldende særegne Kurver, vil den anden bestemmes ved en fra Nul forskjellig Værdi af k.

Da man i Almindelighed gjennem de her anførte Bestemmelser faar endelige Værdier af c, viser det sig, at de her betragtede Grænsekurver virkelig i Almindelighed henhøre til dem, som vi nøjere have undersøgt i 11, og som skulde tælles to Gange med i α_0. Vi se da, at en Kurve i Systemet med et nyt Dobbeltpunkt paa en given Kurve, som Systemets Kurver skulle røre, maa tælles to Gange med i α_0, og en Kurve med et nyt Dobbeltpunkt i et Skjæringspunkt mellem to saadanne givne Kurver maa tælles fire Gange med i α_0, idet en saadan Kurve ifølge ovenstaaende Bestemmelse forekommer en eller to Gange i Systemet. I specielle Tilfælde kunne naturligvis Systemets øvrige Betingelser, deriblandt Formen i O af den eller de Kurver, som den særegne Kurve skal røre i O, bevirke, at samme særegne Kurve forekommer endnu flere Gange.

13. Nærmere Undersøgelse af Kurverne α_1 og α_2. — Ligningen for en Kurve, der til Grænseform har en Kurve α_1 eller α_2, vil ogsaa være indbefattet i Formen (II) i 10 og 11, idet blot $y = 0$ eller $x = 0$ eller begge disse Linier skulle udgjøre Dele af Grænsekurven. Antage vi, at dette er Tilfældet med $y = 0$, maa y være Faktor i φ_3, φ_4, ..., saa Ligningen ogsaa maa kunne skrives

$$y(x + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots) + k\psi = 0. \tag{VIII}$$

Det ses imidlertid, at en saadan Ligning i Almindelighed vilde fremstille en Række Kurver, hvori den særegne Kurve $k = 0$ havde flere nye Dobbeltpunkter, nemlig alle de $n-1$ Skjæringspunkter mellem $y = 0$ og $x + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots = 0$. Da nu dette ikke skal være Tilfældet, men de $n-2$ af disse Punkter, som ikke falde i O, blot skulle være specielle Stillinger af saadanne Dobbeltpunkter, som tilhøre alle Systemets Kurver, indses det, at de nævnte $n-2$ Punkter maa være Skjæringspunkter med den konsekutive Kurve og altsaa ogsaa maa tilfredsstille Ligningen [1] $\psi^{(0)}=0$, hvor $\psi^{(0)}$ er den Funktion, som dannes ved i ψ at sætte $k=0$. De to andre Punkter, hvori $\psi^{(0)}=0$ skjæres af $y=0$, maa være Røringspunkter mellem den særegne Kurve α_1 eller α_2 og Indhyllingskurven for Systemets Kurver. Naar Systemets Indhyllingskurve ikke gaar gjennem Begyndelsespunktet O, blive altsaa de retliniede Grene af Kurverne α_1 og α_2 Dobbelttangenter til Indhyllingskurven for Systemets Kurver.

Skal Systemets Indhyllingskurve gaa gjennem O, vil et af de $n-1$ Skjæringspunkter mellem $y=0$ og $\psi^{(0)}=0$ falde i O. Dette Punkt, som ikke er et af de $n-2$ Dobbeltpunkter, kan da være et af de to Punkter af den retliniede Gren $y=0$, i hvilke den særegne Kurve α_1 eller α_2 rører Indhyllingskurven, og $y=0$ indeholder da endnu kun ét saadant Punkt og vil saaledes foruden at gaa gjennem Indhyllingskurvens Dobbeltpunkt O kun røre den én Gang. Men Punktet O kan ogsaa være et nyt $(n+1)$te Punkt, som $y=0$ faar fælles med Kurven $\psi^{(0)}=0$, som er af n'te Grad, og som altsaa helt indeholder denne rette Linie. I dette Tilfælde bliver $y=0$ selv en af de to Grene af Systemets Indhyllingskurve, som gaa gjennem O. Endog de elementære Systemer levere Exempler paa begge de her nævnte to Tilfælde.

Da Ligning (VIII) er indbefattet i Ligning (II), kan man forøvrigt paa de Kurver i et System, som nærme sig til at falde sammen med en Kurve α_1 eller α_2, overføre alle de Egenskaber, som vi i 10—12 have fundet ved de Kurver, der nærme sig til at falde sammen med en Kurve α_0, forsaavidt de blot ikke særligt vedkomme Forbindelsen med Linier, der for $k=0$ falde sammen med en retliniet Gren af Kurven α_1 eller α_2. Man finder saaledes, naar $x=0$, $y=0$, $k=0$ ikke gjøre $\psi=0$, at O's Afstand fra den Kurve, der svarer til en uendelig lille Værdi af k, er uendelig lille af Ordenen $\frac{1}{2}$, at en Tangent fra O til Restkurven er en enkelt Tangent til Kurven (b') og Kurven (p') og rører dem i Røringspunktet med Restkurven, samt at Linien $x=0$, hvis den ikke ogsaa er en retliniet Gren af Grænsekurven (Kurverne α_1), vil have simpel Røring med Kurverne (c') og (q') i Punktet O o. s. v. Derimod vide vi forud, at ingen Vendetangent falder i Linien $y=0$.

Exempler paa α_1 haves i Systemer af Kurver af tredie Orden med ét Dobbeltpunkt: kommer et nyt til, faas en Kurve sammensat af et Keglesnit og en ret Linie. Hvis denne skjærer Keglesnittet i reelle Punkter, er baade det gamle og det nye Dobbeltpunkt reelle, og tre Vendetangenter ere gaaede tabt, hvoraf den ene er

---

(1) Det synes underligt, at Ligningen for en Kurve α_1 eller α_2 forekommer som specielt Tilfælde af Ligningen for en usædvanlig særegen Kurve; men derved maa erindres, at Punktligningens almindeligste Form fremstiller en Kurve uden særegne Punkter. Iblandt saadanne Kurver vilde ganske vist Kurverne α_1 og α_2 være mindre sædvanlige (ɔ: afhænge af flere Betingelsesligninger), end de Kurver, som i Almindelighed fremkomme som Grænsefigurer for Systemer fremstillede ved Ligninger af Formen (VIII). Her betragte vi derimod Systemer, som vi paa Forhaand tillægge $d+e$ særegne Punkter. — Af denne og lignende Grunde ville vi ofte finde algebraiske Fremstillinger af mere sædvanlige særegne Kurver specielt indbefattede i Fremstillingen af mindre sædvanlige.

reel. Hvis den rette Linie derimod ikke skjærer Keglesnittet, ere begge Dobbeltpunkter imaginære. Selve Kurven α_1 kan da være reel, medens de nærmest liggende Kurver, der have et enkelt imaginært Dobbeltpunkt, maa være imaginære. Kurven α_1 bliver da en isoleret Kurve (se 1ste Note til 10). Ved i Fig. 1, 3 og 5 at ombytte den ene Gren af Kurven 2 med en ret Linie (se Fig. 6, som svarer til Fig. 1) faas Kurver α_1. Det ses da, at i saa Fald Kurverne 1 og 3 ikke have nogen reel Vendetangent, som nærmer sig til at røre denne retliniede Gren i O.

Keglesnit, der opløses i to rette Linier, give Exempler paa Kurverne α_2. Skulle Keglesnittene i et System røre fire Kurver C_1, C_2, C_3, C_4, vil Systemet indeholde et Keglesnit sammensat af en Fællestangent til C_1 og C_2 og en Tangent fra dennes Skjæringspunkt med C_4 til C_3. Indhyllingskurven vil have et Dobbeltpunkt i dette Keglesnits Dobbeltpunkt. C_4 bliver den ene af de Grene af Indhyllingskurven, som gaa derigjennem. Den anden Gren bliver selve Fællestangenten til C_1 og C_2, da man allerede om denne véd, at den skal røre Indhyllingskurven i sine Røringspunkter med C_1 og C_2, hvorved denne rette Linie faar tre Punkter fælles med det konsekutive Keglesnit i Systemet. Tangenten til C_3 rører derimod kun Indhyllingskurven i sit Røringspunkt med C_3. De to Grene af denne Kurve α_2 levere derved Exempler paa begge de ovenfor beskrevne Tilfælde. Hvis C_1, C_2 og C_3 ere Punkter, C_4 en ret Linie, er Systemet elementært.

14. Kurverne α'. — Af Kurverne α's Egenskaber udleder man ved Dualitetsprincipet Egenskaberne ved Kurverne α', som kunne fremstilles ved de samme Ligninger, idet blot Punktkoordinater saa maa ombyttes med Liniekoordinater. Hvis den dobbelte retliniede Gren ikke skal røre Indhyllingskurven, vil i Systemets Ligning — naar den bringes paa Formen (II) ved at tage den nye Dobbelttangents Røringspunkter til Vinkelspidserne $x = 0$, $y = 0$ i Koordinattrekanten — Størrelsen ψ indeholde et af x, y og k uafhængigt endeligt Led som i 10; i modsat Fald maa dette Led blive Nul, og da vil den nye Dobbelttangent ogsaa blive Dobbelttangent til Indhyllingskurven, svarende til 11. I første Tilfælde er Afstanden mellem de sammenfaldende Grene for lim. $k = 0$ af Ordenen $\frac{1}{2}$, og disse Grene ville altsaa for $k > 0$ blive imaginære langs de Strækninger af Dobbelttangenten til Kurven α', hvor de vare reelle for $k < 0$, og omvendt. I andet Tilfælde derimod er Afstanden af første Orden og vedbliver altsaa for $k > 0$ at være reel langs de samme Strækninger, hvor den forud var reel. Overgangen mellem de reelle og imaginære Strækninger sker dels gjennem Røringspunkter med Restkurven (α_0' og α_1') dels gjennem Toppunkter (α_1' og α_2'). I et Røringspunkt med Restkurven falde tre Spidser sammen, hvoraf dog kun den ene er reel. Den nye Dobbelttangent rører i sit Røringspunkt med Restkurven det geometriske Sted for Spidserne, Kurven (c), og denne Kurve har i det Tilfælde, hvor Dobbelttangenten rører Indhyllingskurven, en Spids i det anførte Punkt o. s. v.

Hver af de Kurver, hvor Afstanden mellem Grenene er af Ordenen $\frac{1}{2}$, regnes én Gang med i Tallet α', og hver af dem, hvor den er af Ordenen 1 regnes to Gange. Dette sidste bliver saaledes Tilfældet med saadanne særegne Kurver, hvor den nye Dobbelttangent rører en given Kurve, som Systemets Kurver skulle røre, eller specielt gaar gjennem et Punkt, hvorigjennem de skulle gaa. Rører den nye Dobbelttangent to saadanne Kurver, forekommer den særegne Kurve to Gange i Systemet og tælles hver Gang som to i Tallet α'. Ialt tælles den saaledes som fire (se 12).

I 41 o. f. vil der blive vist en Fremstilling af Kurverne α' ved Punktkoordinater. De der anvendte Ligninger kunne ogsaa benyttes til Fremstilling af Kurverne α ved Liniekoordinater.

I Fig. 7 er 2 en saadan Overgangskurve α_1' mellem Kurverne 1 og 3, hvor den nye Dobbelttangent ikke rører Indhyllingskurven. Overgangen mellem de Dele af Dobbeltlinien af 2, hvortil der nærmer sig reelle og imaginære Grene enten af Kurven 1 eller af Kurven 3, sker dels gjennem Toppunktet a_2 dels gjennem Røringspunktet med Restkurven c_2. Figuren gjør det anskueligt, at a_2 virkelig maa være et Dobbeltpunkt paa Indhyllingskurven (smlgn 13). Paa denne Figur faar det reelle Grene. Læseren vil anskueliggjøre sig mange af de her omtalte Forhold ved Tegningen af en Kurve α_1', hvis Dobbeltlinie rører Systemets Indhyllingskurve, samt af nærliggende Kurver.

Kurverne α ville, naar de betragtes som Tangentdannelser, og Kurverne α', naar de betragtes som Punktdannelser høre med til Kurver med Dobbeltgrene, idet de første have et dobbelt Toppunkt og de sidste en retliniet Gren. Derimod have Kurverne α og α' ikke Dobbeltgrene, naar de henholdsvis betragtes som Punkt- og Tangentdannelser. Af denne Grund støde vi allerede paa dem her, hvor vi dog beskjæftige os med særegne Kurver uden Mangefoldsgrene.

15. Kurverne β og β'. — Tavlen i 8 viser, at en Kurve β betragtet som Tangentdannelse er sammensat af Restkurven og et Toppunkt, der falder i den nye Spids, der er dannet af et blandt de d Dobbeltpunkter. De n'—4 Tangenter fra dette Toppunkt til Restkurven ere Dobbelttangenter til den fuldstændige Kurve, og i Tangenten i selve Spidsen falde to af dennes Vendetangenter sammen.

En Kurve β' er, betragtet som Punktdannelse, sammensat af Restkurven og en ret Linie, der falder i den nye Vendetangent. Dennes Skjæringspunkter med Restkurven ere Dobbeltpunkter, og i Vendepunktet falde to Spidser sammen.

En Kurve β med Spids i Begyndelsespunktet og Linien $y = 0$ til Tangent i dette Punkt fremstilles ved Ligningen

$$y^2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \ldots = 0.$$

Hvis det Dobbeltpunkt, som er gaaet over til en Spids, ligger fast, maa Systemets Ligning være af Formen

$$y^2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \ldots. + k\,(\psi_2 + \psi_3 + \ldots) = 0, \tag{IX}$$

hvor ψ_2, ψ_3 ... ere Funktioner af x, y og k, som ere af anden, tredie ... Grad med Hensyn til x og y. Naar derimod det Dobbeltpunkt, som gaar over til en Spids, bevæger sig, maa man i Ligning (IX) ombytte x og y med $x + f\,(k)$ og $y + g\,(k)$; hvor f og g betegne Funktioner af k, der blive Nul for $k = 0$. Udviklede efter stigende Potenser af

k, maa de fremdeles give lutter hele Exponenter, da den ved en lille Værdi af k bestemte Kurve ellers vilde faa flere Dobbeltpunkter, der for $k = 0$ faldt i Begyndelsespunktet. Andre Betingelser ere disse Rækker ikke underkastede. Man har da

$$f(k) = a_1 k + a_2 k^2 + .., \quad g(k) = b_1 k + b_2 k^2 + ..,$$

som i Almindelighed blive uendelig smaa af første Orden for lim. $k = 0$. Ligning (IX) vil da omdannes til en Ligning af Formen

$$y^2 + 2b_1 ky + b_1{}^2 k^2 + 2b_2 k^2 y + 2b_1 b_2 k^3 + \varphi_3 (x + a_1 k, y + b_1 k)$$
$$+ k\psi_2 (x + a_1 k, y + b_1 k) + \chi = 0, \quad \text{(X)}$$

hvor φ_3 og ψ_2 ere Funktioner af tredie og anden Grad (ψ_2 den, der dannes ved at sætte $k = 0$ i ψ_2 i (IX), medens φ_3 er den samme som i (IX)), og hvor χ er en Funktion af x, y og k, som ikke indeholder Led, som ere af lavere end fjerde Grad med Hensyn til disse Størrelser. (Det ses let, at denne Egenskab ved χ er nødvendig, men ikke tilstrækkelig).

Ligning (X) giver, at en ret Linie gjennem Begyndelsespunktet $\left(\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1}\right)$, vil skjære den ved k bestemte Kurve i Systemet i to Punkter, hvis Afstande fra O blive uendelig smaa af første Orden. Første Led af begge disse Skjæringspunkters Ordinater bliver $y = -b_1 k$. Ved Bestemmelsen af andet Led maa man tage Leddene af tredie Orden i (X) med. Man finder da

$$y = -b_1 k \pm \sqrt{-(\varphi_3 + k\psi_2)},$$

hvor man i φ_3 og ψ_2 for x skal sætte $\frac{x_1}{y_1} y$ og derefter for y sætte $-b_1 k$. Andet Led, og dermed Differensen mellem de to Skjæringspunkters Afstande fra O, bliver saaledes af Ordenen $\frac{3}{2}$, medmindre $x : y$ er saaledes bestemt, at Størrelsen under Rodtegnet bliver Nul ved de anførte Indsættelser eller ved at sætte $k = -\frac{y}{b_1}$. De rette Linier, med hvilke dette er Tilfældet, fremstilles ved Ligningen

$$\varphi_3 (b_1 x - a_1 y, 0) - y\psi_2 (b_1 x - a_1 y, 0) = 0.$$

Leddene indeholde den fælles Faktor $(b_1 x - a_1 y)^2$, som bestemmer Tangenten til den Gren af det geometriske Sted for Dobbeltpunkterne, Kurven (b), som gaar gjennem Punktet. Efter Bortskaffelse af denne Faktor bliver tilbage en Faktor af første Grad, som bestemmer Tangenten til en enkelt Gren af Indhyllingskurven, som gaar gjennem O.

Ved de fleste Undersøgelser er det forøvrigt bekvemmere at bruge Ligning (IX) end Ligning (X), idet man saa blot maa erindre, at den undersøgte Kurve samtidig med den ved (IX) udtrykte Forandring underkastes en Forskydning, der for lim. $k = 0$ er uendelig lille af første Orden. Ligning (IX) viser, at Tangenterne i Dobbeltpunktet paa den ved k

bestemte Kurve for lim. $k = 0$ ville danne Vinkler, som ere uendelig smaa af Ordenen $\frac{1}{2}$, saavel indbyrdes som med Linien $y = 0$, og at det samme bliver Tilfældet med de Vendetangenter, som nærme sig til $y = 0$. Disse bestemmes lettest ved af (IX) at danne Ligningen $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$. Disse Omstændigheder, paa hvilke Kurvens og dermed de omtalte Tangenters samtidige Bevægelse ingen Forandring gjør, ville bevirke, at Kurverne (p) og (c') (se 3) have simpel Røring med $y = 0$ i Punktet O.

Ligning (IX) viser, at Afstandene fra O til Vendetangenternes Røringspunkter blive uendelig smaa af første Orden, naar det særegne Punkt ligger fast i O. Sammensættes disse Afstande med det særegne Punkts Bevægelse, faas paany uendelig smaa Størrelser af første Orden. Derimod bliver den indbyrdes Afstand mellem Vendetangenternes Røringspunkter uendelig lille af Ordenen $\frac{3}{2}$. Heraf følger, at Kurven (q') faar en Spids i Punktet O. — Idet de forskjellige her omtalte Punktpar eller Liniepar afhænge af Størrelser, i hvis Rækkeudviklinger $k^{\frac{1}{2}}$ maa indgaa, ville de gaa over fra reelle til imaginære eller omvendt, naar k skifter Fortegn, saafremt ellers det særegne Punkt er reelt og Funktionerne ψ ere reelle.

Dualitetsprincipet giver Egenskaberne ved Kurverne β', der kunne fremstilles ved de samme Ligninger, idet da blot Punktkoordinater maa ombyttes med Liniekoordinater.

Paa Fig. 8 betegner 2 en Overgangskurve β mellem 1 og 3. Dobbeltpunket b_1 paa 1 har reelle Grene; men b_3 er et isoleret Punkt paa 3. Derimod ere de to Vendetangenter c_3' reelle paa Kurven 3. At det altid maa være Kurven med isoleret Punkt, paa hvilken de to Vendetangenter, der nærme sig til at falde sammen, ere reelle, viser sig ved Tegning af Figuren, men kan naturligvis ogsaa bevises analytisk. Det er ogsaa bekjendt, at af de tre Vendetangenter til en Kurve af tredie Orden med Dobbeltpunkt er kun en reel, naar Dobbeltpunktet har reelle Grene, men alle tre, naar det er et isoleret Punkt. a er Systemets Indhyllingskurve, b_1 b_2 b_3 det geometriske Sted (b) for Dobbeltpunkter, c_2' og de to Linier c_3' tre Tangenter til Vendetangenternes Indhyllingskurve; c_2' er den midterste af disse tre Tangenter.

Paa Fig. 9 er 2 en Overgangskurve β' mellem 1 og 3. b_1' og b_3' ere Dobbelttangenter til 1 og 3 henholdsvis med reelle og imaginære Røringspunkter. (a) og (b') ere Punkter af Systemets Indhyllingskurve og Dobbelttangenternes Indhyllingskurve. Kurven c_3 c_2 c_3 er det geometriske Sted for Spidserne.

16. Kurverne γ_0 og γ_0'. — Tavlen i 8 viser, at en Kurve γ_0, naar den betragtes som Tangentfrembringelse, er sammensat af Restkurven og et Toppunkt, som maa falde i den Spids, der er gaaet over til et Røringspunkt mellem to Grene. De $n'-5$ Tangenter fra dette Punkt til Restkurven ere Dobbelttangenter til den fuldstændige Kurve γ_0. Naar nu Restkurven har $d' - n' + 7$ Dobbelttangenter, maa dette bero paa, at den har faaet to nye Dobbelttangenter. Det har den ogsaa virkelig, idet de to Dobbelttangenter, som falde sammen i Fællestangenten til de to Grene, der røre hinanden (se 18), ikke ere Grænsestillinger for Dobbelttangenter til en foranderlig Kurve i Systemet. Denne Fællestangent maa derimod være Grænsestillingen for de fire Vendetangenter, som Restkurven har mindre end en fuldstændig Kurve i Systemet.

En Kurve γ_0' vil, naar den betragtes som Punktfrembringelse, være sammensat af Restkurven og dennes Tangent i Røringspunktet mellem to af dens Grene. Den fuldstændige Kurve har denne Linies Skjæringspunkter med Restkurven til Dobbeltpunkter og har fire sammenfaldende Spidser i Røringspunktet.

Hvis den Spids, der paa en Kurve γ_0 bliver til et Røringspunkt mellem to Grene, ligger fast saavelsom Tangenten i denne Spids, og man tager Spidsen og Tangenten til Begyndelsespunkt og Linie $y = 0$, bliver Systemets Ligning

$$y^2 + y\,\varphi_2 + \varphi_4 + \ldots + k\,(y^2 + \psi_3 + \psi_4 + \ldots) = 0, \tag{XI}$$

hvor φ betegner Funktioner alene af x og y, ψ af x, y og k, Mærketallene Graderne med Hensyn til x og y.

Denne samme Ligning vil da tjene til at henføre et almindeligt System til et bevægeligt Koordinatsystem. For at faa det henført til et fast Koordinatsystem, maatte man ombytte x og y med de lineære Funktioner $ax + by + c$ og $a_1 x + b_1 y + c_1$, hvor a, b, c, a_1, b_1, c_1 ere Funktioner af k, blandt hvilke a og b_1 blive 1 for $k = 0$, medens de andre for lim. $k = 0$ blive uendelig smaa af første Orden (smlgn. 15). I de fleste Undersøgelser vil det imidlertid være bekvemmest at bruge det bevægelige Koordinatsystem og altsaa Ligning (XI).

Man finder, at en ret Linie gjennem Kurven γ_0's særegne Punkt O — hvis Ligning i det faste Koordinatsystem er $\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1}$, men som ved den modsatte Koordinatændring af den ovenfor angivne kan henføres til samme bevægelige Koordinatsystem, hvortil Kurvesystemet henføres ved Ligning (XI) — i Almindelighed skjærer en nærliggende Kurve i to Punkter, hvis Afstande fra O ere uendelig smaa af første Orden, medens disse Afstandes Differens er af anden Orden. Denne vil reduceres til Ordenen $\frac{5}{2}$, naar den rette Linie gjennem O rører den Gren af Kurven (c) (geometrisk Sted for Spidser), som gaar gjennem dette Punkt, og for endnu en Værdi af $x_1 : y_1$. Denne sidste bestemmer Tangenten til en Gren af Systemets Indhyllingskurve, som gaar gjennem Punktet O.

Røringspunkterne for Vendetangenterne ville, naar Koordinatsystemet i (XI) er fast, i Almindelighed have Afstande fra O og indbyrdes, som blive uendelig smaa af første Orden, naar lim. $k = 0$. Det samme bliver da Tilfældet, naar Systemet bevæger sig, saa hvert af disse Punkter giver sin Gren af Kurven (q') gjennem Punktet O. Kurven (q') har saaledes fire forskjellige Grene gjennem O. — Ligeledes blive Vendetangenternes Vinkler uendelig smaa af første Orden samtidig med, at disse Linier faa Afstande fra O, som ere uendelig smaa af første Orden. Tangenten til Kurven γ_0, i dens særegne Punkt O

rører saaledes Vendetangenternes Indhyllingskurve (c') i fire Punkter, af hvilke i Almindelighed ikke noget falder i O. De Vendetangenter, der ere reelle for $k < 0$, vedblive at være det, naar $k > 0$.

Dualitetsprincipet giver de tilsvarende Egenskaber ved Kurverne γ_0''s nærliggende Kurver.

Paa Fig. 10, 11, 12 fremstiller 2 tre forskjellige Former for de Grene af en Overgangskurve γ_0, der gaa gjennem det nye særegne Punkt O, nemlig saadanne, hvor disse Grene vende Konkaviteterne modsat Vej eller samme Vej eller ere imaginære, saa Punktet bliver et isoleret Punkt. I alle tre Tilfælde maa man under Tegningen af de nærliggende Kurver 1 og 3 iagttage, at ingen ret Linie, der er forbunden med en af disse Kurver paa en saadan Maade, at den kommer til at gaa igjennem O, naar Kurven falder sammen med 2, maa skjære den i mere end fire Punkter, som samtidig ville falde i O, samt at ingen af disse Kurver har nogen Dobbelttangent, der til Grænsestilling har Tangenten til 2 i O. Man vil da i alle tre Tilfælde finde to og kun to reelle Vendetangenter blandt de fire, som nærme sig til Tangenten til 2 i dens særegne Punkt. Dette maa ogsaa kunne bevises analytisk. (c') betegner Punkter af Vendetangenternes Indhyllingskurve.

Figurerne 13, 14, 15, hvor 2 er en Kurve γ_0', svare dualistisk henholdsvis til Fig. 10, 11, 12.

17. Kurverne γ_1. — En Kurve γ_1 adskiller sig, naar den betragtes som Punktfrembringelse, kun derved fra en Kurve γ_0, at den ene af de to Grene, der røre hinanden, er en ret Linie. Tavlen i 8 viser, at Røringspunktet O ogsaa nu maa være et enkelt Toppunkt. De n'—3 Tangenter for O til Restkurver maa da være Dobbelttangenter, og Tavlen viser, at den fuldstændige Kurve γ_1 ikke har andre Dobbelttangenter end disse og Restkurvens. Den fuldstændige Kurve γ_1 har derimod en Vendetangent mere end Restkurven, og denne maa falde sammen med den retliniede Gren. Vi se da, at Kurven γ_1 betragtet som Tangentdannelse er en saadan Kurve i Systemet, der i Stedet for en Vendetangent har faaet en Røring mellem to Grene, af hvilke den ene er et Toppunkt, uden at der har fundet nogen yderligere Sammenfalden Sted af særegne Tangenter eller nogen yderligere Dannelse af Toppunkter. En Kurve γ_1 er altsaa tillige en Kurve γ_1' (se 7). Dualitetsprincipet giver, at den omvendte Sætning ogsaa er rigtig.

En Kurve γ_1 fremstilles analytisk paa samme Maade som en Kurve γ_0 eller γ_0'. Skal Kurven $k = 0$ i det til et bevægeligt Koordinatsystem henførte Kurvesystem (XI) være en Kurve γ_1, maa y være Faktor i $\varphi_4 + \ldots$, og skriver man da for $\varphi_4 + \ldots$ $y(\varphi_3 + \ldots)$, skulle de $n-3$ fra Nul forskjellige Rødder x i den Ligning, der dannes ved i

$$\varphi_2 + \varphi_3 + \ldots = 0$$

at sætte $y = 0$, ogsaa være Rødder i den Ligning, der dannes ved i

$$\psi_3 + \psi_4 + \ldots = 0$$

at sætte $k = 0$, $y = 0$ (smlgn. 13), eller de to saaledes dannede Polynomier i x skulle paa en Faktor ax nær være identiske. Den retliniede Grens Røringspunkt med Indhyllingskurven kan naturligvis her først vise sig, naar vi ogsaa tage Hensyn til Koordinatsystemets Bevægelse. Naar denne retliniede Gren to Gange skal røre Systemets Indhyllingskurve, vil den have $n+1$ Punkter fælles med den konsekutive Kurve — nemlig to (reelle eller imaginære), der falde sammen i det særegne Punkt O, de n—3 Skjæringspunkter med Restkurven og de to Røringspunkter med Indhyllingskurven. Den maa altsaa ogsaa blive en Gren af den konsekutive Kurve og altsaa ogsaa af Indhyllingskurven (smlgn. 13). Kurven γ_1's Toppunkt vil have tilsvarende Egenskaber. Forøvrigt fremgaa Egenskaberne ved Kurverne γ_1's nærliggende Kurver af, hvad der i 16 er sagt om Kurverne γ_0's nærliggende Kurver.

Paa Fig. 16 er 2 en Overgangskurve γ_1 mellem 1 og 3. De tre Kurver, som ere tegnede i Fig. 16, danne tilsammen en Overgangsfigur mellem Figurerne 10 og 11, naar alle Kurver paa disse Figurer betragtes som Punktdannelser, og mellem Figurerne 13 og 14, naar Kurverne betragtes som Tangentdannelser. For med Øjet ogsaa at opfatte dette sidste maa man erindre, at en retliniet Gren ikke gjør sig gjældende paa en Kurve, der betragtes som Tangentdannelse, samt at Fig. 16 skal dannes af 13 eller 14 derved, at to Grene lukkes sammen til en Bue med meget stærk Krumning, som kan nærme sig til et Toppunkt, f. Ex. de øverste i Fig. 13, som for Kurven 1's Vedkommende ere forbundne ved en punkteret Linie.

18. Kurverne $(2d)$, (de) og $(2e)$. — Naar to Dobbeltpunkter falde sammen, uden at flere særegne Punkter falde i samme Punkt, maa begge Dobbeltpunkterne dannes af de samme to Grene, som saaledes komme til at røre hinanden. Ifølge 6 er ingen af disse to Grene retliniet. Der vil derfor samtidig falde to Fællestangenter til Grenene sammen i Tangenten i Røringspunket, uden at der tillige falder flere særegne Tangenter sammen. De særegne Kurver $(2d)$ ere derfor tillige Kurver $(2d')$. Dualitetsprincipet giver den omvendte Sætning.

Hvis et af de to her omtalte Dobbeltpunkter ombyttes med en Spids, bliver det dannede særegne Punkt som bekjendt (se forøvrigt 20) Tilbagegangspunkt af anden Art af den simpleste Beskaffenhed (nemlig et saadant, hvor Kurven skjæres af sin Tangent i fire sammenfaldende Punkter [1]). I et saadant Punkts Tangent falder en Dobbelttangent sammen med en Vendetangent [2], og man finder da ligeledes, at de særegne Kurver (de) og de særegne Kurver $(d'e')$ ere de samme.

Hvis endelig to Spidser skulle falde sammen i et Punkt O uden at danne noget nyt Dobbeltpunkt, ser man, at de Grene, der danne disse Spidser maa smelte saaledes sammen, at de danne samme Figur som to Grene, der gaa gjennem Punktet O, uden at nogen enkelt af dem danner særegne Punkter. I modsat Fald havde man nemlig et fir-

---

[1] Ligesaa er en Spids et Tilbagegangspunkt af første Art af den simpleste Beskaffenhed, nemlig et saadant, hvor Kurven skjæres af sin Tangent i tre sammenfaldende Punkter. Andre Tilbagegangspunkter af første eller anden Art dannes ved yderligere Sammenfalden af Dobbeltpunkter og Spidser.

[2] Se Plücker *Theorie der algebraischen Curven.* 2 Afsn. 62.

dobbelt Punkt, i hvilket foruden de to Spidser endnu fire Dobbeltpunkter faldt sammen. Paa en Sammenfalden af to Spidser, uden at samtidig Dobbeltpunkter faldt sammen, have vi havt Exempel i Kurverne β', hvor den ene af de to Grene blev en ret Linie, der var Vendetangent til Restkurven, og som altsaa havde Trepunktsrøring (Røring af anden Orden) med den. Vi have nu i 7, netop for at udelukke Kurverne β', forudsat, at Kurverne $(2e)$ ikke havde retliniede Grene; men vi skulle nu se, at ogsaa de to Grene af en Kurve $(2e)$ have Trepunktsrøring.

Hertil kunne vi blandt andet anvende de Plücker'ske Formler. Idet det særegne Punkt ikke mere betragtes som dannet af to Grene med Spidser, men af to Grene uden særegne Punkter, ere de særegne Punkter, som erstatte Spidserne, saadanne, som kunne dannes af forskjellige Grene, altsaa sammensatte af lutter Dobbeltpunkter. Vi have nu forudsat, at ingen Gren af Kurven er retliniet, og der dannes ingen Toppunkter, ved at to Spidser falde sammen, saa Kurven beholder Tallene n og n'. Den første Formel (1) giver da, at to Spidser, naar n og n' skulle blive uforandrede, maa ombyttes med tre Dobbeltpunkter. Heraf følger, at de to Grene af Kurven $2e$ faa Trepunktsrøring. Det samme vil man finde ved for en nærliggende Kurve til Kurven $(2e)$ at konstruere en Hjælpekurve, der rører den i begge Spidser. Denne Hjælpekurve faar til Grænsestilling en Kurve, der skjærer Kurven $(2e)$ i sex Punkter, der falde sammen i det særegne Punkt. — Det samme vil i 21 fremgaa ad analytisk Vej.

Naar man i de Plücker'ske Formler ombytter e og d med $e-2$ og $d+3$ uden at forandre n og n', maa man samtidig ombytte e' og d' med $e'-2$ og $d'+3$. Det ses da, at, samtidig med at de to Spidser falde sammen og danne tre Dobbeltpunkter, maa to Vendetangenter falde sammen og danne tre Dobbelttangenter. Kurverne $(2e)$ ere altsaa tillige Kurver $(2e')$. Dualitetsprincipet giver den omvendte Sætning.

Anmærkning. Vi se, at vi, naar vi betragte en Kurve $(2e)$ for sig, efter Behag kunne regne dens Plücker'ske Tal, enten saaledes, at det nye særegne Punkt er dannet af 3 Dobbeltpunkter, den særegne Tangent af 3 Dobbelttangenter, eller saaledes, at de dannes henholdsvis af 2 Spidser og 2 Vendetangenter. Naar den derimod betragtes som en Kurve i Systemet, maa man holde sig til den sidste Opfattelse. Nu har Cayley[1], idet han foruden til en Kurves Plücker'ske Tal tager Hensyn til dens Slægt (*genre*), tillagt enhver Kurve med sammensatte særegne Punkter og Tangenter fuldkommen bestemte Plücker'ske Tal, og hans Bestemmelse af disse er en saadan, at Røring af anden Orden mellem to Grene skal være dannet derved, at saavel tre Dobbeltpunkter som tre Dobbelttangenter falde sammen. Da man nu imidlertid virkelig i Systemer af Kurver med mindst

(1) *Quart. Journal of Math.* vol. VII p. 212.

to Spidser og to Vendetangenter finder Kurver $(2e)$, hvad vi have fundet bekræftet ved Kurver af fjerde Orden, kan det Hensyn, der ligger til Grund for Cayley's Betragtning, ikke gjøre sig gjældende her.

19. Analytisk Fremstilling af Kurverne $(2d)$. — Vi ville henføre en vilkaarlig Kurve i et System, som, idet k nærmer sig til Nul, nærmer sig til en Kurve $(2d)$, til et Koordinatsystem, hvor $y = 0$ er Forbindelseslinien mellem de to Dobbeltpunkter, som falde sammen for $k = 0$. Denne er i Almindelighed bevægelig; men da den er fuldkommen bestemt, naar Kurven er en given nærliggende Kurve til $(2d)$, vil Ændring til et fast Koordinatsystem ske ved en Ligning, hvis Koefficienter kunne udvikles i Rækker efter Potenser af k med hele Exponenter. Om Ligningen for Kurvesystemet henført til dette bevægelige Koordinatsystem maa der altsaa gjælde det samme, som i 2 er forudsat at gjælde om den Ligning, hvorved Systemet henføres til et fast Koordinatsystem, at Koefficienterne kunne udvikles i Rækker efter Potenser af k med hele Exponenter. Systemets Ligning bliver altsaa ogsaa nu — naar vi lade Axen $x = 0$ gaa igjennem det særegne Punkt paa Kurven $(2d)$ af Formen

$$y^2 + \varphi_2 y + \varphi_4 + \ldots + k\psi = 0. \tag{XII}$$

Da der kun er to Dobbeltpunkter, som for $k = 0$ falde i Begyndelsespunktet, maa deres Abscisser kunne udvikles i Række efter Potenser af $k^{\frac{1}{2}}$ med hele Exponenter $f_1 k^{\frac{1}{2}} + f_2 k + \ldots$. Ved Flytning af Begyndelsespunktet til et af disse Dobbeltpunkter, som sker ved Ombytning af x med $x + f_1 k^{\frac{1}{2}} + f_2 k + \ldots$, skal Ligningen komme til ikke at indeholde Led, som ere af mindre end anden Grad med Hensyn til x og y. Denne Omstændighed kan benyttes til Bestemmelse af $f_1, f_2 \ldots$ samt af visse Ligninger, som Koefficienterne i ψ maa tilfredsstille. Man vil for det første finde, at Ligningen (XII) ikke kan indeholde Led af mindre end anden Grad med Hensyn til y, k og x^2. Leddene af anden Grad med Hensyn til disse Størrelser tjene til Bestemmelse af f_1. De ere

$$y^2 + ax^2 y + bx^4 + k(a_1 y + b_1 x^2) + k^2 b_2. \tag{XIII}$$

Naar disse Led ved Indsættelse af $x + f_1 k^{\frac{1}{2}}$ for x skulle reduceres til Led af mindst anden Grad med Hensyn til x og y, maa man have

$$\begin{aligned} af_1^2 + a_1 &= 0, \\ bf_1^4 + b_1 f_1^2 + b_2 &= 0, \\ 4bf_1^3 + 2b_1 f_1 &= 0. \end{aligned}$$

Disse Ligninger medføre Betingelsesligningerne

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_2}{\frac{b_1}{2}} = \frac{\frac{b_1}{2}}{b},$$

hvorefter den første Ligning bestemmer f_1.

Leddene af anden Grad med Hensyn til x og y i det omdannede Polynomium (XIII) ville da, efter Reduktion ved de fundne Ligninger, blive

$$y^2 + 2af_1k^{\frac{1}{2}}xy + 4bf_1{}^2kx^2 = 0, \tag{XIV}$$

som tjener til Bestemmelse af første Led i de Udtryk for $\frac{y}{x}$, som bestemme Tangenterne i det Dobbeltpunkt, hvortil Begyndelsespunktet er flyttet. — Paa lignende Maade kunde man ved at medtage Led af højere Orden af Kurvesystemets Ligning finde flere Led i de her omtalte Rækkeudviklinger samt de Betingelser, som de øvrige Koefficienter i ψ skulle tilfredsstille.

Idet den bevægelige Abscisseaxes Forflyttelse, der for lim. $k = 0$ i Almindelighed er uendelig lille af første Orden — da den kun afhænger af Potenser af k med hele Exponenter —, forsvinder over for Forflyttelser af Ordenen $\frac{1}{2}$, finde vi, at de to Dobbeltpunkter paa den ved en uendelig lille Værdi af k bestemte Kurve i Almindelighed have en Afstand fra det særegne Punkt paa Kurven ($2d$) og indbyrdes, som er uendelig lille af Ordenen $\frac{1}{2}$, og at Tangenterne i disse Dobbeltpunkter danne Vinkler med den særegne Tangent og indbyrdes af Ordenen $\frac{1}{2}$. Man vil ligeledes kunne udlede af disse Ligninger — i Stedet for hvilke man ogsaa kunde have anvendt Tangentligninger —, at Bevægelserne af de to Dobbelttangenter, der nærme sig til at falde sammen, og af deres Røringspunkter blive uendelig smaa af Ordenen $\frac{1}{2}$ for lim. $k = 0$. Heraf slutter man, at én Gren af Kurverne b og b' og to Grene af Kurverne p og p' røre Kurven ($2d$) i dens særegne Punkt. Derimod vil Systemets Indhyllingskurve i Almindelighed ikke gaa gjennem dette Punkt. — De her omtalte Resultater følge forøvrigt af, at hver af de to Grene af den til en Værdi af k svarende Kurve ifølge 2, naar lim. $k = 0$, skulle have en Afstand fra den tilsvarende Gren af Kurven ($2d$), som er uendelig lille af første Orden.

Paa Fig. 17 antages de to Grene at bevæge sig i modsat Retning. Idet Konkaviteterne vende modsat Vej, ere Dobbeltpunkterne reelle, saalænge Dobbelttangenterne ere imaginære (Kurven 1) og omvendt (Kurven 3). Det modsatte er Tilfældet, naar Konkaviteterne vende samme Vej.

20. Analytisk Fremstilling af Kurverne (de). Hvis de i 19 fremstillede særegne Kurver skulle være Kurver (de), maa de to Tangenter i et af Dobbeltpunkterne falde sammen. En nødvendig Betingelse herfor er, at (XIV) giver lige Rødder, eller at

$$a^2 = 4b.$$

Denne Betingelse, som rammer de af k uafhængige Led i Systemets Ligning (XII); ((XIII) indeholder Led af denne), udtrykker netop, hvad der er angivet i 18, at det særegne Punkt paa Kurven (de) er et Tilbagegangspunkt af anden Art.

Ved den videre Undersøgelse af Kurver, der nærme sig til en Kurve (de) [samt af dem, der nærme sig til en Kurve $(2e)$], vil det være bekvemt at foretage en Forandring af Koordinatsystemet, idet vi ombytte

$$y + \frac{a}{2} x^2 \text{ med den enkelte Benævnelse } y. \qquad \text{(XV)}$$

Ligningerne $y =$ Konst. ville da fremstille Parabler (Keglesnit, hvis man ikke har brugt Parallelkoordinater), som ikke skjære hverandre i noget bevægeligt Punkt, og som skjære Linierne $x =$ Konst. i ét bevægeligt Punkt. Et Punkt bliver saaledes fuldkommen bestemt ved sine Koordinater (x, y). Betingelserne for Skjæring og derved ogsaa for Dobbeltpunkt blive de samme som i et lineært Koordinatsystem.

Som i 19 benytte vi nu baade et fast og et bevægeligt Koordinatsystem. I det faste er Kurven $y = 0$ en Parabel med vilkaarlig valgt Axeretning, som oskulerer Kurven (de) i dens særegne Punkt, og Linien $x = 0$ er en ret Linie gjennem dette Punkt; i det bevægelige er Linien $x = 0$ den samme, medens Kurven $y = 0$ er en ny Parabel bestemt i det faste System ved en Ligning af første Grad, hvis Koefficienter ere bestemte saaledes, at den gaar gjennem de to særegne Punkter paa den ved k bestemte Kurve, der for $k = 0$ falde sammen. Disse Koefficienter kunne udvikles i Rækker efter Potenser af k med hele Exponenter.

Ligningen for en Kurve i Systemet bliver i dette bevægelige Koordinatsystem af Formen

$$(1 + \varphi_1) y^2 + \varphi_3 y + \varphi_5 + \ldots + k \psi = 0. \qquad \text{(XVI)}$$

Hvis man nu ved at ombytte x med $x + f_1 k^{\frac{1}{2}} + f_2 k + \ldots$ vil bortskaffe Leddene af mindre end anden Grad med Hensyn til x og y og kun faa saadanne Led af anden Grad, som danne et fuldstændigt Kvadrat, vil man finde [1], at $f_1 = 0$, hvis φ_5 indeholder et af y uafhængigt Led. At $f_1 = 0$, maatte man ogsaa vente her, hvor de særegne Punkter, som nærme sig til at falde sammen, ere af forskjellig Beskaffenhed og altsaa ikke kunne bestemmes ved blot at tage de to Værdier af $k^{\frac{1}{2}}$. Rækkerne maa da kun indeholde Potenser af k med hel Exponent.

Ved Bestemmelsen af den første Koefficient f_2 benyttes følgende Led af (XVI) — der, som vi skulle se nedenfor, slet ikke vil indeholde Led, der ere af Graden Nul med Hensyn til y og af mindre end 5te Grad med Hensyn til x og k eller af første Grad med Hensyn til y og af mindre end 3die Grad med Hensyn til x og k:

$$y^2 + bx^3 y + cx^5 + k(b_1 x^2 y + c_1 x^4) + k^2 (b_2 xy + c_2 x^3) + k^3 (b_3 y + c_3 x^2) + k^4 c_4 x + k^5 c_5. \qquad \text{(XVII)}$$

Skulle Leddene af mindre end anden Grad med Hensyn til x og y forsvinde heraf, ved at x ombyttes med $x + f_2 k$, maa f_2 være Rod i Ligningen

$$b f_2{}^3 + b_1 f_2{}^2 + b_2 f_2 + b_3 = 0, \qquad \text{(XVIII)}$$

---

(1) Fremgangsmaaden er den samme, som nu strax skal benyttes til Bestemmelse af f_2.

og to Gange være Rod i Ligningen

$$cf_2{}^5 + c_1 f_2{}^4 + c_2 f_2{}^3 + c_3 f_2{}^2 + c_4 f_2 + c_5 = 0. \tag{XIX}$$

Første Led i de Værdier af $\frac{y}{x}$, som bestemme Stillingen af Tangenterne i det til en Værdi af f_2 svarende særegne Punkt mod den bevægelige Parabel $y = 0$, findes ved Ligningen

$$y^2 + (10cf_2{}^3 + 6c_1 f_2{}^2 + 3c_2 f_2 + c_3)\, k^3 x^2 = 0, \tag{XX}$$

idet Koefficienten til xy, som bliver af anden Grad med Hensyn til k, ikke kan komme i Betragtning, saalænge vi ikke medtage flere Led af Kurvens Ligning. Naar nu Punktet skal være en Spids, maa denne Ligning have lige Rødder. Koefficienten til x^2 maa da forsvinde, hvorved udtrykkes, at f_2 endnu en tredie Gang er Rod i (XIX). De Betingelser, som Koefficienterne b_1, b_2, b_3, c_1, .. c_5 maa tilfredsstille, for at det fremstillede System virkelig skal være et saadant, hvori $k = 0$ giver en Kurve (de), ere altsaa de, som udtrykke, at Ligning (XIX) har en dobbelt og en tredobbelt Rod, og at disse begge tilfredsstille Ligning (XVIII).

Vi se nu let Rigtigheden af den Paastand, at Ligning (XVII) ikke kan indeholde Led, der ikke indeholde y, og som ere af lavere end femte Grad med Hensyn til x og k. Saadanne Led vilde nemlig give Anledning til en Ligning, som skulde spille samme Rolle som (XIX), altsaa ogsaa have en dobbelt og en tredobbelt Rod, men som var af lavere Grad, hvilket er umuligt.

Man ser ogsaa, at Ligningen ikke kan indeholde Led, som kun indeholde første Potens af y og ere af mindre end tredie Grad med Hensyn til x og k. Da Ligningen nemlig for $k = 0$ ikke har noget saadant Led, vilde disse Led ikke indeholde x i højere Potens end første, og altsaa give Anledning til en Ligning af første Grad, der skulde erstatte (XVIII), hvilket er umuligt, da denne Ligning skal have 2 Rødder.

Man finder, at naar en Kurve bestemt ved k nærmer sig til at falde sammen med en Kurve (de), blive dens særegne Punkters Afstande fra det særegne Punkt paa (de) uendelig smaa af første Orden. De Vinkler, som Tangenterne i Dobbeltpunktet danne med den bevægelige Parabel $y = 0$, og altsaa indbyrdes, blive af Ordenen $\frac{3}{2}$, medens den Vinkel, som Tangenten i Spidsen danner med samme Kurve, bliver af anden Orden. Nu danne i disse Punkter (hvis x-Koordinater ere uendelig smaa af første Orden) Tangenterne til Parablen (hvis Afvigelse fra Parablen i det faste System ligeledes i Almindelighed er uendelig lille af første Orden) Vinkler med den særegne Tangent til Kurven (de), som maa blive af første Orden. Det samme bliver da Tilfældet med Tangenterne til den ved k bestemte Kurve i dens særegne Punkter.

Ligeledes finder man ved Ombytning af Punkt og Liniekoordinater, at de to særegne Tangenter til den ved k bestemte Kurve og deres Røringspunkter afvige uendelig lidt af første Orden fra deres Beliggenheder paa Kurven (de). Afstanden mellem Dobbelttangentens to Røringspunkter bliver derimod af Ordenen $\frac{3}{2}$. — Vi se heraf, at Kurverne (b), (c) og (q') gaa gjennem det særegne Punkt paa Kurven (de), og at dette Punkt bliver en Spids paa Kurven (p'), samt at Kurverne (b'), (c') og (q) røre den særegne Tangent til Kurven (de), og at denne Linie bliver en Vendetangent til Kurven (p).

Ved Tegningen af en Figur (se Fig. 18) ser man, at Dobbeltpunktets Grene og Dobbelttangentens Røringspunkter samtidig ere reelle (Kurven 1) og samtidig imaginære (Kurven 3).

21. Analytisk Fremstilling af Kurverne $(2e)$. — Naar Ligning (XVI), idet vi vedblive at benytte samme Koordinatsystem, skal fremstille Kurver, der for lim. $k = 0$ nærme sig til en Kurve $(2e)$, ses det af 20, at φ_5 maa indeholde Faktoren y; thi i modsat Fald kunde paa den ene Side de to særegne Punkter, der nærme sig til at falde sammen, ikke bestemmes ved $x = f_1 k^{\frac{1}{2}} + f_2 k + \ldots$, saaledes at $f_1 \gtrless 0$, og paa den anden Side skulde, naar $f_1 = 0$, Ligning (XIX) have to tredobbelte Rødder. Ligningen kan da skrives

$$(1 + \varphi_1) y^2 + (\varphi_3 + \varphi_4) y + \varphi_6 + \ldots + k \psi = 0. \tag{XXI}$$

Denne Ligning viser, at Kurven $(2e)$ virkelig har to Grene gjennem Punktet (0, 0), som begge have Trepunktsrøring med Kurven $y = 0$ altsaa ogsaa indbyrdes.

Hvis nu de Spidser paa (XXI), som nærme sig til at falde sammen, skulle bestemmes ved $x = f_1 k^{\frac{1}{2}} + f_2 k + \ldots$, maa følgende Led af (XXI), som ikke vil indeholde Led under anden Grad med Hensyn til y, $k^{\frac{3}{2}}$ og x^3, benyttes til Bestemmelsen af f_1:

$$y^2 + b x^3 y + c x^6 + k (b_1 x y + c_1 x^4) + k^2 c_2 x^2 + k^3 c_3. \tag{XXII}$$

Naar Led af mindre end anden Grad med Hensyn til x og y skulle forsvinde heraf ved Indsættelse af $x + f_1 k^{\frac{1}{2}}$, og naar Leddene af anden Grad skulle danne et fuldstændigt Kvadrat, maa man have

$$f_1 = -\frac{b_1}{b} = \frac{4 c_1}{b^2 - 12 c}, \tag{XXIII}$$

og denne Størrelse maa desuden være dobbelt Rod i Ligningen

$$c x^3 + c_1 x^2 + c_2 x + c_3 = 0. \tag{XXIV}$$

Den Værdi af $\frac{y}{x}$, som bestemmer den Vinkel, Tangenten i en Spids danner med Kurven $y = 0$, bliver for lim. $k = 0$ uendelig lille af første Orden; men da selve denne Kurves Tangent i det paagjældende Punkt danner en Vinkel af Ordenen $\frac{1}{2}$ med den særegne Tangent til Kurven $(2e)$, bliver den Vinkel, som Spidsens Tangent danner, ogsaa af Ordenen $\frac{1}{2}$.

Man finder saaledes, at paa en Kurve, der idet lim. $k = 0$ nærmer sig til en Kurve $(2e)$, ville de to Spidser og Tangenterne i samme, samt de to Vendetangenter og sammes

Røringspunkter have Afstande fra og danne Vinkler med deres Grænsestillinger, som ere uendelig smaa af Ordenen $\frac{1}{2}$. Heraf følger, at Kurverne (c), (c'), (q) og (q') røre Kurven $(2e)$ i dens særegne Punkt.

Ved Tegningen af Figurer (se Fig. 19 og 20) ser man, at de to Spidser og de to Vendetangenter samtidig ere reelle (Kurverne 1) og samtidig blive imaginære (Kurverne 3). Paa Fig. 20 reduceres den Gren af Kurve 2, hvorpaa det her kommer an, til et Punkt og bliver imaginær paa Kurven 3.

22. Kurverne $(3d)$, $(2de)$, $(d\,2e)$, $(3d')$, $(2d'e')$, $(d'\,2e')$. — De særegne Punkter paa og Tangenter til Kurverne (de) og $(2e)$ opstod derved, at to særegne Punkter eller Tangenter faldt sammen, uden at dette medførte, at flere faldt sammen med dem. Dette vil derimod være Tilfældet, naar der ved deres Sammenfalden dannes tredobbelte Punkter og Tangenter i dette Ords mest omfattende Betydning, det er: Punkter, i hvilke Kurven af enhver ret Linie, som gaar derigjennem, skjæres i tre sammenfaldende Punkter, og Linier, i hvilke tre af de Tangenter til Kurven, som udgaa fra et hvilketsomhelst af deres Punkter, falde sammen (¹).

Det er maaske mest iøjnefaldende, at Kurverne $(3d')$, $(2d'e')$ og $(2e'd')$ høre til et Systems sædvanlige særegne Kurver. Det vil nemlig være dem, hvor en Dobbelttangent enten endnu engang rører Kurven $[(3d')]$, eller i et af sine Røringspunkter faar Røring af anden Orden $[(2d'e')]$, eller faar sædvanlig Topunktsrøring i to sammenfaldende Røringspunkter, altsaa Firpunktsrøring $[(d'\,2e')]$. Derved dannes henholdsvis en tredobbelt Tangent med adskilte Røringspunkter (altsaa en egentlig tredobbelt Tangent) eller en tredobbelt Tangent (i den ovenfor nævnte omfattende Betydning af Ordet) med to eller med tre sammenfaldende Røringspunkter. Dobbelttangenten falder sammen henholdsvis med to andre Dobbelttangenter, med en anden Dobbelttangent og en Vendetangent eller med to Vendetangenter. For at et Kurvesystem virkelig skal indeholde Kurver $(3d')$, $(2d'e')$, $(d'\,2e')$, maa dets Kurver mindst være af 6'te, 5'te eller 4'de Orden og mindst have de særegne Tangenter, som skulle falde sammen. — Dualitetsprincipet giver de tilsvarende Egenskaber ved Kurverne $(3d)$, $(2de)$ og $(d\,2e)$.

Da en Kurve $(3d)$ eller $(2de)$ dannes ved, at en ny Gren gaar gjennem et Dobbeltpunkt eller en Spids, og saavel den tilsvarende Gren som det tilsvarende Punkt af en nærliggende Kurve — bestemt ved k — for lim. $k = 0$ ere i uendelig smaa Afstande af første Orden fra de Stillinger, de indtage paa Kurverne $(3d)$ og $(2de)$, ville den nærliggende Kurves Egenskaber følge af de bekjendte Egenskaber ved Dobbeltpunkter og Spidser. Man finder, at det særegne Punkt paa en Kurve $(3d)$ er et tredobbelt Punkt paa Kurven (b), og

(¹) Havde vi brugt den tilsvarende mest omfattende Betydning af dobbelt Punkt og dobbelt Tangent, maatte vi have betragtet Spidser og Vendetangenter som specielle Tilfælde af dobbelte Punkter og Tangenter.

at det særegne Punkt paa en Kurve $(2\,de)$ er en Spids paa Kurven (b) og et enkelt Punkt af Kurven (c).

Man finder ligesaa, at den særegne Tangent til Kurven $(3\,d')$ er tredobbelt Tangent til Kurven (b'), og at den særegne Tangent til Kurven $(2\,d'e')$ er Vendetangent til Kurven (b') og enkelt Tangent til Kurven (c').

23. Analytisk Bestemmelse af Kurverne $(d\,2e)$ og $(d'\,2e')$. — Et Kurvesystem, hvor $k = 0$ giver en Kurve $(d'\,2e')$, kan, idet vi paany anvende sædvanlige lineære Koordinater, fremstilles ved Ligningen

$$y(\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2) + \varphi_4 + \ldots + k\psi = 0, \tag{XXV}$$

og denne Ligning vil i Almindelighed — det er, naar ikke noget særeget Punkt falder i Punktet (0, 0) (som i XII)) — fremstille et saadant System. Undersøgelsen foretages imidlertid lettest ved et bevægeligt Koordinatsystem, i hvilket man til Axe $y = 0$ tager den Dobbelttangent, der har Axen $y = 0$ i det faste Koordinatsystem til Grænsestilling. I saa Fald skal Ligningen, derved at Begyndelsespunktet flyttes til et Røringspunkt ved for x at sætte $x + f_1 k^{\frac{1}{2}} + f_2 k + \ldots$, miste de Led, som ere uafhængige af y og af mindre end anden Grad med Hensyn til x. En Betingelse herfor vil være, at blandt de af y uafhængige Led, som Ligningen indeholder, intet er af mindre end anden Grad med Hensyn til x^2 og k, medens Leddene af anden Grad danne et Kvadrat. De Led af Ligning (XXV), som man da faar Brug for i de Undersøgelser, hvorpaa det her udelukkende kommer an, blive da

$$y + a(x^2 + a_1 k)^2. \tag{XXVI}$$

Man finder $f_1{}^2 = -a_1$.

Paa den ved k bestemte Kurve faa, naar lim. $k = 0$, Dobbelttangentens og de to Vendetangenters Røringspunkter Afstande fra Kurven $(d'\,2e')$'s Røringspunkt med sin særegne Tangent, som ere uendelig smaa af Ordenen $\frac{1}{2}$. Vendetangenterne paa den ved k bestemte Kurve danne saavel indbyrdes som med samme Kurves Dobbelttangent Vinkler af Ordenen $\frac{3}{2}$; den Tangent fra et Punkt af Dobbelttangenten i endelig Afstand fra dens Røringspunkter, som for $k = 0$ falder sammen med Dobbelttangenten, danner en Vinkel af anden Orden med Dobbelttangenten, og den Tangent fra et Punkt af en Vendetangent i endelig Afstand fra dens Røringspunkt, som for $k = 0$ falder sammen med Vendetangenten, danner ligeledes en Vinkel af anden Orden med Vendetangenten. Alle disse Linier danne derimod Vinkler af første Orden med den særegne Tangent til Kurven $(d'\,2e')$.

Man ser, at den særegne Tangent til Kurven $d'\,2e')$ rører Kurverne (p') og (q') i sit Røringspunkt med $(d'\,2e')$, og at den i et og samme af sine andre Punkter rører Kurven (b') og er Vendetangent til Kurven (c'). (Se Fig. 21).

Ved Anvendelse af Dualitetsprincipet paa de ovenfor angivne Resultater ser man, af hvad Orden Afstandene fra det særegne Punkt paa en Kurve $(d\,2e)$ til Punkter af en nærliggende Kurve, som have dette Punkt til Grænsestilling, ere, og af hvad Orden de Vinkler ere, som Tangenter i saadanne Punkter danne med deres Grænsestilling. Man finder, at Kurverne (p) og (q) i det særegne Punkt af Kurven $(d\,2e)$ røre denne, at Kurven (b) gaar derigjennem, og at Kurven (c) har en Spids i dette Punkt, og at disse to Kurver have samme Tangent. (Se Fig. 22).

Vi skulle her endnu tilføje, at der i 40 vil blive gjort en stereometrisk Anvendelse af Læren om Systemer af Kurver, som maaske vil tjene til yderligere at belyse de særegne Kurver.

Andet Afsnit.

Relationer mellem Karakteristiker og Antal af sædvanlige særegne Kurver.

24. Hovedresultater. — I de Ligninger, vi skulle bevise i dette Afsnit, tages der som anført i 4 (S. 12) kun Hensyn til de særegne Kurver, som ere omtalte i forrige Afsnit, altsaa ikke til andre Kurver med Mangefoldsgrene end Kurverne α og α'. Der maa altsaa, naar de skulle anvendes paa saadanne Systemer, hvor der er Kurver med Mangefoldsgrene, tilføjes supplementære Led hidrørende fra disse Kurver. For saa vidt disse Kurver ere bekjendte, findes de supplementære Led ved samme Fremgangsmaade som Formlen.

Man finder følgende Formler, der som Ligninger mellem Antal slutte sig til de Plücker'ske Formler (1) og til Formlerne (2) i 7:

$$2(n-1)\,.\,\mu = \mu' + 2b + 3c + \alpha', \tag{3}$$

$$2(n'-1)\,.\,\mu' = \mu + 2b' + 3c' + \alpha, \tag{3'}$$

$$d\,.\,\mu' + n'\,.\,b = 2p + u + \beta, \tag{4}$$

$$d'\,.\,\mu + n\,.\,b' = 2p' + u' + \beta', \tag{4'}$$

$$e\,.\,\mu' + n'\,.\,c = 3q + v + \gamma, \tag{5}$$

$$e'\,.\,\mu + n\,.\,c' = 3q' + v' + \gamma', \tag{5'}$$

$$2(d-1)\,.\,b = 2x + (2d) + 6(3d) + 3(2de) + (n-6)\alpha_0' + (n-4)\alpha_1' + (n-2)\alpha_2', \tag{6}$$

$$2(d'-1)\,.\,b' = 2x' + (2d) + 6(3d') + 3(2d'c') + (n'-6)\alpha_0 + (n'-4)\alpha_1 + (n'-2)\alpha_2, \tag{6'}$$

$$e\,.\,b + d\,.\,c = y + (de) + 2(2de) + 3(d2e), \tag{7}$$

$$e'\,.\,b' + d'\,.\,c' = y' + (de) + 2(2d'e') + 3(d'2e'), \tag{7'}$$

$$2(e-1)\,.\,c = 2z + (2e) + 3(d2e) + 4\alpha_0' + 2\alpha_1' + \beta' + 12\gamma_0', \tag{8}$$

$$2(e'-1)\,.\,c' = 2z' + (2e) + 3(d'2e') + 4\alpha_0 + 2\alpha_1 + \beta + 12\gamma_0, \tag{8'}$$

$$(n-2)\,.\,\mu' + (n+n'-4)\,.\,\mu = c' + p + 2q, \tag{9}$$

$$(n'-2)\,.\,\mu + (n'+n-4)\,.\,\mu' = c + p' + 2q', \tag{9'}$$

$$(n-2)\,.\,b + d\,.\,\mu = p + 3(3d) + 3(2de) + 2(d2e) + (n-6)\alpha_0' + (n-4)\alpha_1' + (n-2)\alpha_2', \tag{10}$$

$$(n'-2)\,.\,b' + d'\,.\,\mu' = p' + 3(3d') + 3(2d'e') + 2(d'2e') + (n'-6)\alpha_0 + (n'-4)\alpha_1 + (n'-2)\alpha_2, \tag{10'}$$

$$(n-2)\,.\,c + e\,.\,\mu = 2q + (2de) + 4(d2e) + 4\alpha_0' + 2\alpha_1' + 8\gamma_0', \tag{11}$$

$$(n'-2)\,.\,c' + e'\,.\,\mu' = 2q' + (2d'e') + 4(d'2e') + 4\alpha_0 + 2\alpha_1 + 8\gamma_0, \tag{11'}$$

$$(n-3)[(n-2)\,.\,\mu' + 2(n'-2)\,.\,\mu] = 2b' + 2u + 3v + n'\alpha_0' + (n'-1)\alpha_1' + (n'-2)\alpha_2', \tag{12}$$

$$(n'-3)[(n'-2)\,.\,\mu + 2(n-2)\,.\,\mu'] = 2b + 2u' + 3v' + n\alpha_0 + (n-1)\alpha_1 + (n-2)\alpha_2, \tag{12'}$$

$$(n-3)[(n-2)\,.\,b + 2d\,.\,\mu] = u + 4x + 3y + [d-2(n-6)]\alpha_0' + [d-2(n-4)]\alpha_1' + [d-2(n-2)]\alpha_2', \tag{13}$$

$$(n'-3)\,[(n'-2)\,.\,b'+2d'\,.\,\mu'] = u'+4x'+3y'+[d'-2(n'-6)]\,\alpha_0+[d'-2(n'-4)]\,\alpha_1 + [d'-2(n'-2)]\,\alpha_2\,, \qquad (13')$$

$$(n-3)\,[(n-2)\,.\,c+2e\,.\,\mu] = v+2y+6z+(e-6)\,\alpha_0'+(e-3)\,\alpha_1'+e\,\alpha_2'\,, \qquad (14)$$

$$(n'-3)\,[(n'-2)\,.\,c'+2e'\,.\,\mu'] = v'+2y'+6z'+(e'-6)\,\alpha_0+(e'-3)\,\alpha_1+e'\,\alpha_2\,. \qquad (14')$$

Blandt disse 24 Ligninger [(3)—(14)] skulle vi se, at én kan udledes af de andre; de kunne altsaa tjene til at udtrykke 23 af Tallene μ, μ', b, b', c, c', p, p', q, q', u, u', v, v', x, x', y, y', z, z', α_0, α_1, α_2, α_0', α_1', α_2', β, β', γ_0, γ_1, γ_0', $(2d)$, (de), $(2e)$, $(3d)$, $(3d')$, $(2de)$, $(2d'e')$, $(d2e)$, $(d'2e')$ ved de 17 andre, idet de Plücker'ske Tal forudsættes givne. Ligningerne ere homogene og af første Grad med Hensyn til de 40 Tal.

25. Korrespondanceprincipet. — De i 24 opregnede Formler ere fundne ved Hjælp af det saakaldte «*principe de correspondance*», som indeholdes i følgende Sætning:

Naar to bevægelige Punkter X og Y af en ret Linie (L) svare saaledes til hinanden, at der til hvert Punkt X svarer η Punkter Y, og til hvert Punkt Y svarer ξ Punkter X, og naar denne Forbindelse kan udtrykkes ved en algebraisk Ligning mellem Punkternes Afstande fra et fast Punkt af Linien, vil Linien indeholde $\xi+\eta$ Punkter (XY), hvori et Punkt X falder sammen med det tilsvarende Punkt Y. — Det er en Selvfølge, at Punkter af en ret Linie kunne ombyttes med Linier gjennem et Punkt.

Det sædvanlige meget simple Bevis [1] for denne Sætning beror paa, at den algebraiske Ligning maa være af Graden ξ med Hensyn til den ene og af Graden η med Hensyn til den anden af de to Afstande. Vi skulle her anføre et andet Bevis.

Naar man udenfor Linien (L) vælger to faste Punkter A og B saaledes, at Skjæringspunktet C mellem AB og (L) ikke er noget af de søgte Punkter (XY), bliver det geometriske Sted for Skjæringspunktet Z mellem AX og BY en algebraisk Kurve. Denne vil gaa ξ Gange gjennem A, som bliver Skjæringspunkt mellem BC og de Linier, der forbinde A med de ξ Punkter X, der svare til C betragtet som et Punkt Y. Disse Linier blive Tangenter i A. En vilkaarlig Linie AX gjennem A skjærer altsaa den frembragte Kurve i ξ Punkter, som falde i A, og desuden i sine Skjæringspunkter med de η tilsvarende Linier BY, og ikke i noget andet Punkt. Kurven bliver saaledes af Ordenen $\xi+\eta$ og skjærer følgelig ogsaa Linien (L) i $\xi+\eta$ Punkter. Disse ere netop de søgte Punkter (XY).

Anmærkning. Korrespondanceprincipet faar sin Betydning derved, at man uden nogensomhelst Vanskelighed finder, at en vis Forbindelse kan udtrykkes ved en algebraisk Ligning, ogsaa i de Tilfælde, hvor det vilde være yderst vanskeligt eller umuligt ved Gjennemførelse af Eliminationer o. s. v. at finde selve denne Ligning. I de talrige

[1] Se Chasles's Afhandling i *Comptes rendus de l'Académie des sciences* for 27de Juni 1864.

Undersøgelser, hvor jeg har set dette Princip anvendt, eller hvor jeg selv har havt Lejlighed til at anvende det, mindes jeg ikke noget Tilfælde, hvor der behøvedes nogen særlig Prøvelse for at finde, om virkelig Forbindelsen kunde udtrykkes ved en algebraisk Ligning.

At Korrespondanceprincipet kun kan anvendes paa saadanne Forbindelser, som kunne udtrykkes ved algebraiske Ligninger, har saavidt mig bekjendt altid været anerkjendt — om det end ikke altid udtrykkelig har været fremhævet. Jeg kan derfor vel billige, at Dr. Geiser (1) fordrer denne Indskrænkning udtalt; men da jeg altid har betragtet den som hørende med til Principet, maatte det undre mig, at han dermed mente at indskrænke dets Betydning. De Urimeligheder, man vilde komme til ved at udelade denne Indskrænkning, ere forøvrigt saa iøjnefaldende, at det ikke er let at forstaa, hvorledes Manglen deraf i Udtalelsen af Principet kan have givet Hr. Geiser Anledning til Misforstaaelse. Ja i den Udtalelse, som han citerer, som er Chasles's første Udtalelse af Principet (for $\xi = \eta = 1$ eller $\xi = 1$, $\eta = 2$) (2), er Indskrænkningen endog antydet paa en temmelig klar Maade, idet Chasles forudsætter, at man er stødt paa Forbindelsen i Betragtninger, «hvor der ikke forekommer transcendente Kurver eller Funktioner». Naar man gjør denne Indskrænkning, turde det være tydeligt nok, at Principet endnu mindre bør anvendes paa saadanne Tilfælde, hvor Tallene ξ og η faas ved vilkaarlig tegnede Kurver og ved vilkaarlig Skjelnen mellem reelt og imaginært, som i Hr. Geisers Exempler, eller ved en vilkaarlig Skjelnen mellem højre og venstre, konvex og konkav o. s. v.

26. Sammenfaldende Opløsninger. — Hvad der kan besværliggjøre Anvendelsen af Korrespondanceprincipet, er Vanskeligheden ved at bedømme, hvormange Punkter (XY) der falder sammen i et Punkt af Linien (L), hvor et Punkt X falder sammen med et eller flere tilsvarende Punkter Y. Afgjørelsen heraf føres ved det i 25 anførte Bevis tilbage til at afgjøre, hvormange Skjæringspunkter mellem Linien (L) og den konstruerede Hjælpekurve (Z) der falder sammen i et saadant Punkt (3). Den beror da dels paa, hvormange Grene af denne Kurve der gaar gjennem et saadant Punkt, dels paa disse Grenes Beskaffenhed og Ordenen af den Røring, som de maatte have med Linien (L). Denne sidste finder man ved at tage Hensyn til, at, naar Afstanden XY bliver uendelig lille, bliver Punktet Z's Afstand fra den rette Linie (L) uendelig lille af samme Orden, idet Vinklerne i Trekant XYZ ere endelige. Man finder da følgende Regel:

---

(1) *Annali di Matematica IV.*

(2) *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 24 Decbr. 1855.

(3) At Bestemmelsen af Antallet af sammenfaldende Punkter (XY) ogsaa paa Grundlag af den sædvanlige Bevisførelse kan føres tilbage til Bestemmelsen af Antallet af sammenfaldende Skjæringspunkter mellem en ret Linie og en Kurve, har jeg vist i *Nouvelles Annales de Mathématiques* 1867, uden dog udtrykkelig at opstille den her angivne Regel, som man ogsaa kan finde ad den dér anviste Vej — eller rent analytisk.

Naar Punktet X og et af de tilsvarende Punkter Y samtidig falde i et fast Punkt D af Linien, og naar, idet Afstanden DX bliver uendelig lille, XY bliver proportional med $(DX)^{\zeta}$ (se 2), giver et saadant Punkt Y Anledning til, at ζ af de $\xi + \eta$ Punkter (XY) falde i D.

Idet man nu lader X bevæge sig henad Linien og passere D, og man paa denne Maade for sig betragter alle de tilsvarende Punkter Y, som falde i D, naar X gjør det, vil man finde alle de Punkter (XY), som falde sammen i D. Disses Antal bliver helt, idet Antallet af saadanne Punkter Y, der give ζ en bruden Værdi $\frac{p}{q}$, er deleligt med q.

27. Udledelse af Formlerne (3) og (3'). — Vi skulle nu vise, hvorledes vi have anvendt Korrespondanceprincipet til Udledelse af de i 24 opstillede Formler.

Formel (3) er fundet ved at lade X og Y være to af de Punkter, hvori en ret Linie (L) skjæres af en Kurve i Systemet. Gjennem et vilkaarligt Punkt X af Linien gaar der μ Kurver, og hver af dem skjærer den rette Linie i $n-1$ andre Punkter. Til et Punkt X svarer altsaa $\mu(n-1)$ Punkter Y, og omvendt. Altsaa

$$\xi = \eta = \mu(n-1).$$

Punkterne (XY) ere 1) de μ' Punkter, hvori (L) rører Kurver i Systemet, 2) de b Punkter, hvori den skjærer det geometriske Sted for Dobbeltpunkterne (b), 3) de c Punkter, hvori den skjærer det geometriske Sted for Spidserne (c), 4) de α' Punkter, hvori den skjærer Dobbeltlinierne paa Kurverne α'.

Er D et af de μ' Røringspunkter, vil samtidig med X ét af de tilsvarende Punkter Y falde i dette Punkt, idet nemlig én af de μ Kurver gjennem D skjærer (L) i endnu ét Punkt, som falder sammen med D. Nærmer X sig til D, bliver saavel DX som DY uendelig lille af Ordenen $\frac{1}{2}$ (se 2). Det samme maa være Tilfældet med XY. [Man finder $\lim. \frac{XY}{DX} = -2$]. Altsaa bliver $\zeta = 1$, og Punktet D tælles én Gang med blandt Punkterne (XY).

Er D et af de b Skjæringspunkter med Kurven (b), bliver det Dobbeltpunkt paa en Kurve i Systemet. Da denne Kurve to Gange gaar igjennem D, maa den tælles to Gange med blandt de μ Kurver gjennem D. Dette fremgaar ogsaa af 2, hvor vi saa, at naar Systemet i dette Tilfælde fremstilles ved Ligning (I), idet D tages til Begyndelsespunkt, vil $x=0$, $y=0$ gjøre $\varphi^{(0)}=0$ og $\varphi^{(1)}=0$, hvorved to af de Værdier af k, som bestemme Kurver gjennem D, blive Nul. Da hver af de to Kurver skjærer (L) i et Punkt Y foruden det Punkt X, der bestemmer den, vil, naar X falder i D, to tilsvarende Punkter Y ogsaa gjøre det. DX, DY og XY blive, naar X fjerner sig fra D, uendelig smaa af samme Orden, idet Vinklerne i Trekanterne XYU og DXU, hvor U er Dobbeltpunktet paa Kurven gjennem X og Y, ere endelige. De aldeles specielle Tilfælde, hvor dette ikke finder Sted —

i hvilke forøvrigt Punktet D blot paa éngang vilde være et Dobbeltpunkt paa en Kurve i Systemet og et Røringspunkt med (L), eller Dobbeltpunkt paa to Kurver i Systemet — kunne nemlig undgaas ved Valget af (L). Vi have saaledes $\zeta = 1$ og finde altsaa, at to Punkter (XY) falde i et saadant Punkt D. (D bliver Dobbeltpunkt paa Hjælpekurven Z).

Er D et af de c Skjæringspunkter med Kurven (c), bliver det en Spids paa en Kurve i Systemet. Det ses, paa samme Maade som i foregaaende Tilfælde, at, naar X falder i D, to tilsvarende Punkter Y ogsaa gjøre det. Da en ret Linie, hvis Afstand fra en Spids paa en Kurve er uendelig lille af første Orden, i Almindelighed skjærer Kurven i to Punkter, hvis Afstand er uendelig lille af Ordenen $\frac{3}{2}$, ser man, at XY bliver proportional med $DX^{\frac{3}{2}}$. I Punktet D falder saaledes $\frac{3}{2} . 2 = 3$ Punkter (XY) sammen. — (Punktet D bliver en Spids paa Hjælpekurven (Z), der tillige har Linien (L) til Tangent i dette Punkt.)

Er D endelig Skjæringspunktet med Dobbeltlinien paa en Kurve α', vil man, naar denne ikke rører Systemets Indhyllingskurve, ifølge 14 og 10 gjennem et Punkt X, der nærmer sig til D, kun kunne lægge én Kurve, der nærmer sig til α', og Afstandene fra D til dennes Skjæringspunkter X og Y blive af Ordenen $\frac{1}{2}$. Man finder da, som naar D var et af de μ' Røringspunkter, $\zeta = 1$. Naar derimod Dobbeltlinien paa α' rører Indhyllingskurven, falde to blandt de μ Kurver gjennem D sammen i Kurven α' (fire, hvis den desuden forekommer to Gange i Systemet — se 14), og DX og XY blive da begge uendelig smaa af første Orden, altsaa $\zeta = 1$. Det ses saaledes, at der i Punktet D falder 1, 2, 4 Punkter (XY) i de Tilfælde, hvor vi have angivet, at den særegne Kurve tælles 1, 2, 4 Gange med i Tallet α'. Der vil overhovedet falde et Punkt (XY), for hver Gang Kurven tælles med i α'.

Korrespondanceprincipet giver altsaa

$$2(n-1)\mu = \mu' + 2b + 3c + \alpha',$$

som netop er Formlen (3).

Dualitetsprincipet giver Formlen (3'). Dens med den her anførte Udledelse af (3) analoge Udledelse vilde bestaa i, at man søgte sammenfaldende Stillinger (XY) af Linier X og Y fra et fast Punkt, som røre en og samme Kurve i Systemet.

28. Udledelse af Formlerne (4)—(8) og (4')—(8'). — Formlerne (4)—(8) finder man som (3') ved at søge sammenfaldende Stillinger (XY) af til hinanden svarende Linier X og Y fra et fast Punkt. Linien X gaar gjennem et Dobbeltpunkt [(4) og (6)], eller en Spids [(5), (7) og (8)] paa en Kurve i Systemet. En tilsvarende Linie Y rører den samme Kurve [(4) og (5)] eller gaar gjennem et (andet) Dobbeltpunkt [(6) og (7); andet Dobbeltpunkt i (6)] eller en anden Spids [(8)]. Tallet η findes da ved først at søge de Kurver i Systemet, som ere i den angivne Forbindelse med en vilkaarlig ret Linie betragtet som Linie X. Disses Antal bliver

$$\begin{array}{rccccc} \text{i} & (4), & (5), & (6), & (7), & (8) \\ \text{henholdsvis} & b, & c, & b, & c, & c. \end{array}$$

Dernæst søger man for hver af disse Kurver Linierne Y, hvis Antal blive

$$n', \quad n', \quad d-1, \quad d, \quad e-1.$$

Man finder da

$$\eta = n'.b, \quad n'.c, \quad (d-1).b, \quad d.c, \quad (e-1).c.$$

Paa samme Maade finder man

$$\xi = d.\mu', \quad e.\mu', \quad (d-1).b, \quad e.b, \quad (e-1).c,$$

hvorefter Antallet af sammenfaldende Linier bliver $\xi + \eta$.

For nu at finde Koefficienterne paa højre Side af Lighedstegnet benytter man for det første den samme Fremgangsmaade som her til at bestemme de Linier Y, som falde sammen med særegne Stillinger af Linien X, idet man for hver af disse først søger dem blandt de b eller c Kurver, som give saadanne Linier, og dernæst for hver af disse Kurver dem blandt de n', $d-1$, d, $e-1$ Linier Y, som falde sammen med X. Hvormange Gange saa enhver af disse Linier Y skal tælles med i det fundne Tal $\xi + \eta$, afgjøres ved Reglen i 26, idet Ordnerne af de forskjellige uendelig smaa Størrelser ere fundne i vort første Afsnit eller bero paa bekjendte Egenskaber ved Dobbeltpunkter og Spidser. Man vil ved disse Betragtningsmaader netop komme til de i 24 angivne Resultater.

Dualitetsprincipet giver Ligningerne (4')—(8').

29. Hjælpesætninger til Udledelse af Ligningerne (9)—(14) og (9')—(14'). — I Beviserne for Ligningerne (9)—(14) har man Brug for følgende Hjælpesætninger:

1) Det geometriske Sted for Røringspunkterne mellem Kurverne i Systemet og Tangenter fra et fast Punkt A er af Ordenen $\mu + \mu'$; thi det gaar μ Gange igjennem A (Røringspunkt med de μ Kurver, som gaa derigjennem), og skjærer desuden en vilkaarlig ret Linie derigjennem i μ' Punkter.

2) Det geometriske Sted for de $n-2$ Punkter, hvori en Tangent fra et fast Punkt A til en Kurve i Systemet skjærer samme Kurve, er af Ordenen $(n'-2).\mu + (n-2).\mu'$; thi det gaar $(n'-2).\mu$ Gange gjennem A og skjærer desuden en ret Linie derigjennem i $(n-2).\mu'$ Punkter.

3) Det geometriske Sted for de $n-2$ Punkter, hvori en ret Linie fra et fast Punkt A til et Dobbeltpunkt paa en Kurve i Systemet skjærer Kurven foruden i Dobbeltpunktet, er af Ordenen $d.\mu + (n-2).b$, og 4) det geometriske Sted for de Punkter, hvori en ret Linie fra et fast Punkt til en Spids paa en Kurve i Systemet skjærer Kurven foruden i Spidsen, er af Ordenen $e.\mu + (n-2).c$; thi de geometriske Steder gaa henholdsvis $d\mu$ og $e\mu$ Gange gjennem det faste Punkt og skjære desuden en ret Linie gjennem samme i $(n-2).b$ eller $(n-2).c$ Punkter.

Det vilde ikke være vanskeligt ogsaa at bevise de her anførte Sætninger ved Korrespondanceprincipet.

Blandt de Sætninger, som faas ved Anvendelse af Dualitetsprincipet, blive de to første kun andre Former for dem, hvortil de svare.

30. Udledelse af Ligningerne (9)—(14) og (9′)—(14′). — Venstre Side $(n-2).\mu'+(n+n'-4).\mu$ i Ligning (9) angiver Antallet af de Tangenter fra et fast Punkt A til Kurver i Systemet, for hvilke Røringspunktet falder sammen med et af de $(n-2)$ Punkter, hvori Tangenten skjærer Kurven. Dette Antal kan man finde ved Korrespondanceprincipet, idet man søger Antallet af sammenfaldende Stillinger (XY) af Linier X og Y, som forbinde et andet fast Punkt B med Røringspunktet for en Tangent fra A til en Kurve i Systemet og med et af den samme Tangents $n-2$ Skjæringspunkter. Man faar da ifølge 29

$$\xi = (n'-2).\mu+(n-2).\mu', \quad \eta = (n-2)(\mu+\mu').$$

Antallet $\xi+\eta$ af Linier (XY) vil imidlertid foruden Linier fra A til de søgte Tangenters Røringspunkter indbefatte Linien BA $(n-2)\mu'$ Gange. De søgte Tangenters Antal bliver da

$$(n'-2).\mu+(n-2).\mu'+(n-2)(\mu+\mu')-(n-2).\mu' = (n-2).\mu'+(n+n'-4).\mu.$$

Højre Side $c'+p+2q$ i Ligning (9) findes ved Hjælp af den nu flere Gange benyttede Regel 26. At Koefficienterne virkelig maa faa de her angivne Værdier (1, 1 og 2), ser man ogsaa ved at tælle de Skjæringspunkter mellem de to første af de i 29 omtalte Kurver (¹), som falde i Røringspunkterne for de Linier gjennem A, der give Løsninger af den foreliggende Opgave. Saaledes stemmer den Omstændighed, at q faar Koefficienten 2, dermed, at de to Kurver røre hinanden i de q Spidser, hvis Tangenter gaa gjennem A.

Formlerne (10)—(14) bevises ganske paa samme Maade, idet deres venstre Sider angive følgende Antal:

$(n-2).b+d.\mu$ er Antallet af rette Linier, der forbinde et fast Punkt A med et Dobbeltpunkt paa en Kurve i Systemet, som de endnu skjære i et tredie Punkt, der falder sammen med Dobbeltpunktet;

$(n-2).c+e.\mu$ Antallet af Linier, der forbinde A med en Spids paa en Kurve, som de endnu skjære i et tredie Punkt, der falder sammen med Spidsen;

$(n-3)[(n-2).\mu'+2(n'-2).\mu]$ Antallet af Linier gjennem A, som røre en Kurve og endnu engang skjære den i to sammenfaldende Punkter;

$(n-3)[(n-2).b+2d.\mu]$ Antallet af Linier, som forene A med et Dobbeltpunkt paa en Kurve og endnu engang skjære den i to sammenfaldende Punkter.

$(n-3)[(n-2).c+2e.\mu]$ Antallet af Linier, som forene A med en Spids paa en Kurve og endnu engang skjære den i to sammenfaldende Punkter.

(¹) Det er dog ingenlunde alle Skjæringspunkter udenfor A mellem de to Kurver, som give Opløsninger paa den foreliggende Opgave, men kun saadanne, hvor de to Kurvers sammenfaldende Punkter svare til samme Kurve i Systemet.

Ogsaa disse Antal findes ved Korrespondanceprincipet, idet X og Y ere de Linier, som forene et andet Punkt B med de Punkter af Linier gjennem A, som skulle falde sammen, og idet man fra $\xi + \eta$ fradrager de Linier (XY), som falde i Linien BA.

Dualitetsprincipet giver Formlerne (9')—(14').

31. Direkte Udledelse af Ligninger, som kunne erstatte nogle af Ligningerne i 24. — Idet man ved X og Y betegner de to Punkter, hvori en fast ret Linie (L) skjæres af de to Tangenter i et Dobbeltpunkt paa en Kurve i Systemet, finder man, at der er $2p$ Punkter (XY), hvori X og Y falde sammen. Dette kan enten bero paa, at Dobbeltpunktet ligger paa selve den rette Linie, eller derpaa, at de to Tangenter falde sammen. Man finder da

$$2p = 2b + \beta + 2(2d) + 3(de) + (d2e). \tag{15}$$

Dualitetsprincipet giver

$$2p' = 2b' + \beta' + 2(2d) + 3(de) + (d'2e'). \tag{15'}$$

Man kommer til en anden Formel [1] ved at søge Ordenen s af det geometriske Sted for de Punkter, hvori Tangenten til en Kurve i Systemet i et af dens Skjæringspunkter med en ret Linie (M) skjærer den samme Kurve. For at finde Antallet s af dette geometriske Steds Skjæringspunkter med en anden Linie (L) lader man X være et af de Punkter, hvori en Kurve i Systemet skjærer (L), Y et af dem, hvori (L) skjæres af Tangenterne til denne Kurve i dens Skjæringspunkter med (M). Man finder da

$$n.(\mu + \mu') + n.\mu = s + 2\mu + \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha' + 2\beta' + 3\gamma'.$$

Men s kan ogsaa bestemmes ved at tælle de Punkter, hvori samme Kurve skjærer selve Linien (M). Man finder

$$s = \mu'(n-2) + q' + 2b + 2c.$$

Indsættelse giver

$$2(n-1)\mu + 2\mu' = q' + 2b + 2c + \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha' + 2\beta' + 3\gamma'. \tag{16'}$$

Dualitetsprincipet giver

$$2(n'-1)\mu' + 2\mu = q + 2b' + 2c' + \alpha_1' + 2\alpha_2' + 2\alpha + 2\beta + 3\gamma. \tag{16}$$

De her beviste Ligninger kunne, som vi skulle se i 32, alle udledes af dem, som ere opstillede i 24. Korrespondanceprincipet sætter istand til direkte at bevise mange andre, hvorom det samme gjælder. Disse forskjellige Ligninger kunne tjene til Prøve paa Ligningerne i 24, navnlig til Prøve paa, om der ikke skulde være begaaet Fejl ved Bestemmelsen af Koefficienterne eller glemt Led. Hvis man ikke som her direkte havde bestemt alle Koefficienterne, men kun en Del af dem, kunde disse forskjellige Udledelser af samme

---

(1) Herpaa er min Opmærksomhed henledet ved Maillard's Udledelse af sin Formel D, hvoraf den, som her skal anføres, kun er en meget simpel Udvidelse. — Maillard's Betegnelse N svarer til min Betegnelse $\frac{\alpha_1}{2}$.

Formel tjene til Bestemmelse af ubekjendte Koefficienter. Et endnu større Antal af Midler til denne Bestemmelse faar man ved Anvendelse af Formlerne paa en Række af elementære Systemer af Kurver med givne Plücker'ske Tal, idet da et og samme Tal er Karakteristiken μ' i et af disse og Karakteristiken μ i det paafølgende. Det er i Virkeligheden paa denne Maade, at jeg først har fundet en stor Del af disse Koefficienter, hvorefter jeg har benyttet de fundne Værdier til at finde en Del af de Egenskaber ved Systemets Kurver, som omvendt her i Afhandlingen — efter i første Afsnit at være beviste analytisk — have tjent til Bestemmelse af Koefficienterne (Smlgn. Indledning).

32. Afledte Ligninger. — Ved af de i 24 opstillede Ligninger at borteliminere p, p', q, q', u, u', v, v', x, x', y, y', z, z', α_0, α_0' finder man, idet man tillige tager Hensyn til Plückers Formler,

$$(3n'-3n+3d+5e)\mu-(n-2)(3b+4c)-c'+3(3d)+4(2de)+6(d2e)+8\gamma_0'=0, \quad (17)$$

$$\left.\begin{array}{l}-4(5n'+4n-6+6d+9e)\mu+2(n'+2n+6)\mu'+8(3n-1)b+18(2n-1)c-2b'\\ -4(2d)-12(de)-9(2e)-24(3d)-36(2de)-63(d2e)+12\alpha_1'+24\alpha_2'-9\beta'-108\gamma_0'\end{array}\right\}=0, \quad (18)$$

$$\left.\begin{array}{l}2(2n'-12n+12+3d+6e)\mu-2(n-6)\mu'-6(n-5)b-6(n-6)c\\ +2(2d)+3(de)+6(3d)+6(2de)+5(d2e)+4\alpha'_1+8\alpha_2'+\beta\end{array}\right\}=0, \quad (19)$$

$$\left.\begin{array}{l}(48n-48-5e)\mu-24\mu'-48b-(5n+54)c+4(de)+6(2e)\\ +5(2de)+18(d2e)-12\alpha_1'-24\alpha'_2+6\beta'+48\gamma_0'+2\gamma\end{array}\right\}=0, \quad (20)$$

samt de Ligninger, som dannes heraf ved at ombytte mærkede og ikke-mærkede Bogstaver, hvilke vi ville betegne med (17'), (18'), (19'), (20'). Ombytningen af Mærker har, som det vil erindres, ingen Indflydelse paa $(2d)$, (de), $(2e)$, og γ_1. Ovenstaaende Ligninger dannes ved at finde x, y, z, p og q af (6), (7), (8), (10), (11) og indsætte i (9), hvorved (17) findes, i (13) og (14), hvorved u og v findes, dernæst Udtrykkene u og v i (12), hvorved (18) findes, og endelig Udtrykkene for p, q, u og v i (4) og (5), hvorved (19) og (20) findes, idet overalt α' bortskaffes ved Ligning (3).

Man vil dernæst finde, at Ligningen

$$2[(17)-(17')]+1[(18)-(18')]+3[(19)-(19')]+2[(20)-(20')]=0,$$

hvor (17), (17') o. s. v. betegne de venstre Sider i Ligningerne af samme Navn, er identisk. Det viser sig saaledes, at én af de i 24 opstillede Ligninger kan udledes af de andre. Man finder let, at det samme ikke gjælder om flere.

Af Ligningerne (17), (18), (19), (20) samt Ligningerne (3) og (3') i 24, som vi ogsaa ville hidsætte her, skrevne saaledes

$$2(n-1)\mu-\mu'-2b-3c-\alpha'=0, \quad (3)$$

$$2(n'-1)\mu'-\mu-2b'-3c'-\alpha=0, \quad (3')$$

udledes en mærkelig Ligning ved Operationen

$$-2\,(3) - 5\,(3') + 20\,(17) + 5\,(18) + 10\,(19) + 8\,(20).$$

Man finder

$$-15\mu + 4c - 5c' + 2(de) + 3(2e) - (d\,2e) + 5a + 10\beta + 16\gamma + 2\alpha_0' + 6\alpha_1' + 10\alpha_2'$$
$$+ 3\beta' + 4\gamma_0' = 0, \qquad (21)$$

hvor de Plücker'ske Tal ere bortskaffede, uden at derfor Ligningerne ere blevne af mere end første Grad med Hensyn til Tallene μ, c .... Man finder ligeledes

$$-15\mu' + 4c' - 5c + 2(de) + 3(2e) - (d'2e') + 5\alpha' + 10\beta' + 16\gamma' + 2\alpha_0 + 6\alpha_1 + 10\alpha_2$$
$$+ 3\beta + 4\gamma_0 = 0. \qquad (21')$$

Ved mellem Ligningerne (10), (15) og (3) at borteliminere p og α_0' kommer man paany til Ligning (19), og ved mellem (11), (16) (20) (3) og (3') at borteliminere q og de Led, der indeholde Plücker'ske Tal, kommer man paany til (21). Ligningerne (15) og (16) maa da som allerede angivet høre med til dem, der kunne udledes af de i 24 opstillede Ligninger.

33. Kurver i et System, som tilfredsstille en given Betingelse. — Da en Betingelse, som en Kurve i et System skal tilfredsstille, i Almindelighed kan føres tilbage til den, at Punkter af en ret Linie eller Linier i et Bundt skulle falde sammen, kan man anvende Korrespondanceprincipet til at bestemme saadanne Kurvers Antal. Man finder dette Antal udtrykt ved de i Nr. 24 omtalte 40 Tal eller, paa Grund af de 23 Ligninger, som finde Sted mellem disse, ved 17 af dem. Man finder i Almindelighed ved denne Fremgangsmaade ogsaa lineære og homogene Udtryk for de nye Antal. Blandt herhen hørende Bestemmelser — der forøvrigt ikke ere væsentlig forskjellige fra Bestemmelserne af 23 blandt de allerede omtalte 40 Antal ved de 17 andre — maa nævnes Bestemmelsen af Ordenen af geometriske Steder og Klassen af Indhyllingskurver for Punkter og Linier, der ere forbundne med Systemets Kurver. En saadan Orden eller Klasse beror nemlig paa Antallet af de Kurver i Systemet, der have et af vedkommende Punkter beliggende paa en fast ret Linie eller en af vedkommende rette Linier gaaende gjennem et fast Punkt.

Af de her omtalte Bestemmelser af Kurver i et System, der tilfredsstille en given Betingelse, har Chasles som bekjendt først foretaget en overordentlig stor Mængde for Keglesnittenes Vedkommende [1]. De fundne Antal afhænge alene af μ og μ', idet μ, μ', α_2 og α_2' i dette Tilfælde ere de eneste af de 40 Tal, som ikke blive Nul, og idet α_2 og α_2' udtrykkes ved μ og μ' ved Ligningerne (3) og (3'), som give

$$\alpha_2' = 2\mu - \mu', \quad \alpha_2 = 2\mu' - \mu.$$

---

[1] I *Comptes rendus* navnlig i 1864.

Chasles's Methode til derefter at bestemme Antallet af Keglesnit, der tilfredsstille 5 hvilkesomhelst saaledes undersøgte Betingelser, er bekjendt.

For Systemer af Kurver med hvilkesomhelst Plücker'ske Tal haves fremdeles Chasles's, i Indledningen omtalte, vigtige Sætning, at et System indeholder $n_1' \mu + n_1 \mu'$ Kurver, der røre en given Kurve af Ordenen n_1 og Klassen n_1'. Hertil skulle vi (foruden Bestemmelsen af de geometriske Steder i 29 og af s i 31) her [1] endnu kun føje nogle faa Exempler.

Det geometriske Sted for de Punkter, hvori en Tangent i et Dobbeltpunkt paa en Kurve i Systemet skjærer Kurven foruden i Dobbeltpunktet, er af Ordenen [2]:

$$np + 2d\mu - \begin{bmatrix} 6b + (n-2)\,\alpha_1 + 2\,(n-2)\,\alpha_2 + 2\,(n-6)\,\alpha_0' + 2\,(n-4)\,\alpha_1' \\ + 2\,(n-2)\,\alpha_2' + 2\,(n-4)\,\beta' + 3\,(n-5)\,\gamma_0' + 3\,(n-3)\,\gamma_1 \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Dette Tal maa være Nul, naar $n = 3$. — Bestemmelsen sker ved at lade X være et af de Punkter, hvori en ret Linie skjæres af en Kurve i Systemet, og Y et af dem, hvor den skjæres af en Tangent i et af dens Dobbeltpunkter. (Overensstemmelsen med Bestemmelsen af s i 31 faar navnlig Betydning derved, at Koefficienterne blive de samme.)

Det geometriske Sted for de Punkter, hvori en Tangent i en Spids paa en Kurve i Systemet skjærer Kurven foruden i Spidsen, er af Ordenen

$$nq + e\mu - [3c + 4\alpha_0' + 2\,\alpha_1' + 2\,\beta' + 4\,\gamma_0' + \gamma_1]. \tag{23}$$

Dette Tal maa være Nul, naar $n = 3$. — Bestemmelsen sker ved at lade X og Y være Punkter, hvori en Kurve i Systemet og Tangenten i en af dens Spidser skjære en ret Linie.

Det geometriske Sted for de Punkter, hvori Forbindelseslinien mellem to Dobbeltpunkter paa en Kurve i Systemet skjærer denne foruden i Dobbeltpunkterne, er af Ordenen

$$nx + \frac{d\,(d-1)}{2}\,\mu - \begin{bmatrix} 2(d-1)\,b + \frac{(n-2)(n-3)}{2}\,\alpha_1 + 2\,\frac{(n-2)(n-3)}{2}\,\alpha_2 + 4\,\frac{(n-6)(n-7)}{2}\,\alpha_0' \\ + 4\,\frac{(n-4)(n-5)}{2}\,\alpha_1' + 4\,\frac{(n-2)(n-3)}{2}\,\alpha_2' + 2\,\frac{(n-4)(n-5)}{2}\,\beta' \\ + 3\,\frac{(n-5)(n-6)}{2}\,\gamma_0' + 3\,\frac{(n-3)(n-4)}{2}\,\gamma_1 \end{bmatrix}. \tag{24}$$

---

(1) Jeg haaber snart andetsteds at meddele flere Bestemmelser af Kurver i et System, der tilfredsstille en given Betingelse.

(2) Vi trække ikke de fundne Tal sammen, men lade dem staa saaledes, at det er tydeligt, hvorfra hvert Led hidrører.

Dette Tal maa være Nul, naar $n = 4$. — Til X og Y tages Punkter, hvor en Kurve i Systemet og Forbindelseslinien mellem to af dens Dobbeltpunkter skjære en ret Linie.

Det geometriske Sted for de Punkter, hvori Forbindelseslinien mellem et Dobbeltpunkt og en Spids paa en Kurve i Systemet skjærer denne foruden i Dobbeltpunktet og Spidsen, er af Ordenen

$$ny + de\mu - [2eb + 2dc + 12(n-6)\alpha_0' + 6(n-4)\alpha_1' + 3(n-4)\beta' + 8(n-5)\gamma_0' + 2(n-3)\gamma_1]. \quad (25$$

Dette Tal maa være Nul, naar $n = 4$. Til X og Y tages de Punkter, hvor en Kurve i Systemet og Forbindelseslinien mellem et af dens Dobbeltpunkter og en af dens Spidser skjære en ret Linie.

Det geometriske Sted for de Punkter, hvori Forbindelslinien mellem to Spidser paa en Kurve i Systemet skjærer denne foruden i Spidserne, er) af Ordenen

$$nz + \frac{e(e-1}{2}\mu - \left[2(e-1)c + (9+4)\alpha_0' + 2\alpha_1' + \beta' + \frac{4.3}{2}\gamma_0'\right]. \quad (26)$$

Dette Tal maa være Nul, naar $n = 4$. — Til X og Y tages Punkter, hvori en Kurve i Systemet og Forbindelseslinien mellem to af dens Spidser skjære en ret Linie.

Hvis man paa lignende Maade søger Antallene af Kurver, paa hvilke tre særegne Punkter ligge ud i en ret Linie, ville disse være Nul, naar $n = 5$, hvorved man ogsaa i dette Tilfælde finder Ligninger mellem de 40 Tal.

Om end de Ligninger, man ad denne Vei finder for $n = 3$ og $n = 4$, ogsaa kunne udledes af Ligningerne i 24, naar man tager Hensyn til, at i disse Tilfælde en Del af Størrelserne $(p', v' \ldots (2\,d'e') \ldots)$ ere Nul, ville de dog blive os nyttige, dels fordi de tildels blive simplere end dem i 24, dels fordi de føre os til nye vigtige Formler. I de Systemer, hvor de i (22)—(26) udtrykte Tal blive Nul, vil man nemlig let kunne finde Udtryk for Antallet af de Kurver i Systemet, som have et Dobbeltpunkt eller en Spids i et givet Punkt, hvorigjennem Systemets Kurver skulle gaa. De p, q, x, y, z Tangenter i eller Forbindelseslinier mellem særegne Punkter, som gaa gjennem et saadant givet Punkt P, maa nemlig enten høre til Kurver, der have et særeget Punkt i P, eller til Kurver, hvoraf en retliniet Gren gaar igjennem P, idet man ellers vilde faa rette Linier, der skar en Kurve af tredie eller fjerde Orden i mere end 3 eller 4 Punkter. De Koefficienter, hvormed disse forskjellige Slags Kurver forekomme i Udtrykkene for p, q, x, y, z, ville fremdeles være de samme som dem, de tilsvarende Led have i (22)—(26). Heraf skulle vi gjøre Brug i 35—39 og i næste Afsnit.

Det er klart, at man kan anvende Dualitetsprincipet paa de her udviklede Sætninger.

34. Anvendelse paa Systemer, hvor $d = e = 0$. — De i det foregaaende udviklede Resultater ere anvendelige paa Systemer, som ikke indeholde andre Kurver med Mangefoldsgrene end Kurverne α og α'. De ville da kunne anvendes paa alle Systemer af Kurver af n'te Orden, som gaa gjennem mere end $\frac{n^2 - n + 2}{2}$ givne Punkter, og hvor blot Kurverne α ere de eneste særegne Kurver, som have dobbelt Toppunkt uden samtidig at have dobbelte retliniede eller krumliniede Grene. En Kurve sammensat af en dobbelt ret Linie og en Restkurve af Ordenen $n-2$ kan nemlig højst bringes til at gaa gjennem $\frac{(n-2)(n+1)}{2} + 2 = \frac{n^2 - n + 2}{2}$ givne Punkter, og en Kurve med en krum Dobbeltgren vil kun kunne bringes til at gaa gjennem et endnu mindre Antal Punkter.

Indenfor den anførte Grænse kan man da anvende de af Formlerne i 24, som ikke udtrykkelig forudsætte Tilstedeværelsen af særegne Punkter, paa Systemer af Kurver af n'te Orden uden Dobbeltpunkter og Spidser. For disse Systemers Vedkommende maa man, naar $n > 2$, have

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \beta = \gamma = \alpha' = \beta' = \gamma' = (2\,d) = (d\,e) = (2\,e) = (3\,d) = (2\,d\,e) = (d\,2\,e) = 0,$$
$$p = q = u = v = x = y = z = 0,$$

dels umiddelbart paa Grund af disse Tals Betydning dels paa Grund af 8. Man finder da [1], idet $n' = n\,(n-1)$, $d' = \frac{1}{2} n\,(n-2)\,(n^2-9)$, $e' = 3\,n\,(n-2)$:

$$\begin{aligned}
b' &= 2\,n\,(n-2)\,(n-3)\,.\,\mu \\
c' &= 3\,n\,(n-2)\,.\,\mu \\
\alpha &= \alpha_0 = 3\,(n-1)^2\,.\,\mu \\
p' &= (n-3)\,(2\,n^2 + 5\,n - 6)\,.\,\mu \\
q' &= 6\,(n-1)\,.\,\mu \\
u' &= \tfrac{1}{2}\,(n-3)\,(n-4)\,(5\,n^2 + 5\,n - 6)\,.\,\mu \\
v' &= 3\,(n-3)\,(n^2 + 2\,n - 2)\,.\,\mu \\
x' &= \tfrac{1}{2}\,(n-3)\,(2\,n^6 - 8\,n^5 - 16\,n^4 + 96\,n^3 - 40\,n^2 - 199\,n + 90)\,.\,\mu \\
y' &= \tfrac{3}{2}\,(n-3)\,(n^5 + 3\,n^4 - 28\,n^3 + 20\,n^2 + 76\,n - 40)\,.\,\mu \\
z' &= 3\,(3\,n^4 - 12\,n^3 + 39\,n - 20)\,.\,\mu \\
(3\,d') &= (n-3)\,(n-4)\,(n-5)\,(n^2 + 3\,n - 2)\,.\,\mu \\
(2\,d'\,e') &= 3\,(n-3)\,(n-4)\,(n^2 + 6\,n - 4)\,.\,\mu \\
(d'\,2\,e') &= 6\,(n-3)\,(3\,n-2)\,.\,\mu
\end{aligned}$$

---

(1) Nogle af disse Udtryk ere fundne af de Jonquières, som ogsaa har angivet den ovenfor nævnte Grænse for deres Anvendelighed. Se Crelle Borchardt Journal 66de Bd. og tidligere Afhandlinger.

35. Systemerne $n=3$, $d=0$, $e=1$. — Det vil i tredie Afsnit vise sig, at naar en Kurve er sammensat af en dobbelt ret Linie og en Restkurve, er et Skjæringspunkt mellem den dobbelte Gren og Restkurven mindst et dobbelt Toppunkt, hvis der ikke falder to Dobbeltpunkter sammen i dette Punkt. En Kurve af tredie Orden og Klasse, sammensat af en enkelt og dobbelt retliniet Gren, vilde da foruden disse Grenes Skjæringspunkt kun have ét Toppunkt. Den kunde da kun underkastes 5 elementære Betingelser (gaa gjennem givne Punkter og røre givne Linier), medens Systemer af Kurver af tredie Orden og Klasse underkastes 6 Betingelser. Kurver med en dobbelt retliniet Gren høre altsaa ikke til disse Systemers sædvanlige særegne Kurver (se 4). Det samme ses om tredobbelte rette Linier med tre Toppunkter. Naar derimod én af de elementære Betingelser ombyttes f. Ex. med den at skulle have Spidsen paa en given Kurve, træffer man disse to Slags særegne Kurver. — Paa samme Maade ser man, at Kurver sammensatte af tre rette Linier gjennem samme Punkt ikke høre til de sædvanlige særegne Kurver. [Se forøvrigt 58].

Kurverne γ_1 $(=\gamma_1')$ ville være sammensatte af et Keglesnit og en Tangent til samme. Derimod bliver

$$\alpha=\beta=\gamma_0=\alpha'=\beta'=\gamma_0'=(2\,d)=(de)=(2\,e)=(3\,d)=(2\,d\,e)=(d\,2\,e)=(3\,d')=(2\,d'e')$$
$$=(d'2\,e')=0,$$
$$p=p'=u=u'=v=v'=x=x'=y=y'=z=z'=0.$$

Naar man da holder sig til Systemer med sædvanlige særegne Kurver, faar man af Formlerne i 24 — eller saadanne, som kunne træde i Stedet for disse, se 31 og 33 —

$$2\gamma_1=\mu+\mu',$$
$$3\,c=4\,\mu-\mu',\qquad 3\,c'=4\,\mu'-\mu,$$
$$6\,q=7\,\mu-\mu',\qquad 6\,q'=7\,\mu'-\mu.$$

Hvis man ved $[c]$ betegner Antallet af Kurver, der have et givet Punkt, hvorigjennem Systemets Kurver skulle gaa, til Spids, ved $[\gamma_1]$ Antallet af Kurver γ_1, hvis retliniede Gren gaar gjennem et saadant givet Punkt — og ved $[c']'$ Antallet af de Kurver, der have en given ret Linie, som Systemets Kurver skulle røre, til Vendetangent, ved $[\gamma_1]'$ Antallet af de Kurver γ_1, hvis Toppunkt ligger paa en saadan Linie —, finder man desuden ved (23) [se desuden Slutning af 33], at

$$3\,[c]=q-[\gamma_1],\qquad 3\,[c']'=q'-[\gamma_1]'.$$

γ_1, $[\gamma_1]$ og $[\gamma_1]'$ bero kun paa Bestemmelse af Keglesnit. Tallene μ, μ', c, c', q, q', $[c]$, $[c']$ kunne da findes, naar man kjender ét af dem eller en Relation mellem dem. I et System $(3\,P,\ 3\,L)$, som gaar gjennem 3 givne Punkter og rører 3 givne rette Linier, er saaledes $\mu=\mu'$, idet de her omtalte Kurver ligesom Keglesnittene svare dualistisk til sig selv. Dette Systems Karakteristiker kunne da bestemmes. Derefter vil man kjende en af Karakteristikerne i de nærmeste Systemer $(4\,P,\ 2\,L)$ og $(2\,P,\ 4\,L)$, og saaledes kan man efterhaanden bestemme Karakteristikerne i alle de elementære Systemer. Ved Udtrykket for $[c]$ undgaar man særskilt at skulle undersøge Systemer af Kurver med Spidsen i et givet Punkt, hvilke indeholde usædvanlige særegne Kurver.

I det følgende skulle vi ved $[b]$ og $[c]$ betegne de Kurver, som have et Dobbeltpunkt eller en Spids i et givet Punkt, hvorigjennem Systemets Kurver skulle gaa, og ved $[\alpha_1]$, $[\alpha_2]$, $[\alpha']$, $[\beta']$, $[\gamma']$, de Kurver α_1, α_2, α', β', γ', hvis enkelte eller dobbelte retliniede Grene gaa igjennem et saadant Punkt. I tredie Afsnit ville $[\xi]$, $[\eta]$ ... have en tilsvarende Betydning, — $[b']'$ $[c']'$ $[\beta]'$, $[\gamma]'$ o. s. v. have de Betydninger, som svare dualistisk til $[b]$, $[c]$, $[\beta']$, $[\gamma']$ o. s. v.

36. Systemerne $n=3$, $d=1$, $e=0$. — Heller ikke her vil der sædvanligvis være andre Kurver med Mangefoldsgrene end Kurverne α_1. (Se Exempel til 13). Man har $\alpha_0 = \alpha_2 = \gamma = \alpha' = \beta' = \gamma' = (2d) = (de) = (2e) = (3d) = (2de) = (d2e) = (3d') = (2d'e')$ $= (d'2e') = 0,$

$$q = u = v = x = y = z = p' = u' = v' = x' = y' = 0.$$

Man finder da ved Formlerne i 24, samt ved (22) og (26)

$$\beta = 2\mu, \qquad 2\alpha_1 = 3\mu' - 2\mu,$$
$$2b = 4\mu - \mu', \qquad 2p = 6\mu - \mu',$$
$$2c' = 3\mu', \qquad 2q' = 2\mu + 3\mu', \qquad 2z' = 3\mu',$$
$$6[b] = p - [\alpha_1], \qquad 4[c']' = z' - 2[\alpha_1]' - [\beta]',$$

hvoraf man, naar α_1 og β samt $[\alpha_1]$, $[\alpha_1]'$ og $[\beta]'$ forud ere bestemte ved Læren om Keglesnit og 35, kan finde de øvrige Tal. — Chasles's Hypothese, at Antallet af Kurver, som tilfredsstille en given Betingelse, som er uafhængig af dem, der bestemme Systemet, skal være en lineær og homogen Funktion af μ og μ', bekræftes for de her og i 35 omtalte Systemers Vedkommende, saalænge de kun indeholde sædvanlige særegne Kurrver.

37. Systemer $n=4$, $d=1$, $e=2$. — I Systemer af fjerde Orden med tre særegne Punkter vil man «sædvanligvis» heller ikke træffe andre Kurver med Mangefoldsgrene end Kurverne α og α'. Blandt disse Systemer behøve vi ikke at omtale dem med 3 Spidser — altsaa af tredie Klasse — da deres Egenskaber faas ved Anvendelse af Dualitetsprincipet paa dem, der ere omtalte i 36.

I Systemer af Kurver af fjerde Orden med et Dobbeltpunkt og to Spidser er

$$\alpha = \alpha' = \gamma_0 = \gamma_0' = (2d) = (3d) = (3d') = (2de) = (2d'e') = 0,$$

medens Kurverne $(2e)$ ere sammensatte af to Keglesnit, som have Trepunktsrøring, og Restkurverne γ_1, β' og β henholdsvis ere dem, der ere omtalte i 35 og 36, og de nysnævnte af tredie Klasse. Man har desuden $x = x' = u = u' = 0$. Man finder nu

$$9\beta = -2\mu + 5\mu' + 4(b - b'), \qquad 9\beta' = -2\mu' + 5\mu + 4(b' - b),$$
$$3\gamma_1 = \mu + \mu',$$
$$3(2e) = \mu + \mu' - (b + b'),$$
$$3c = 6\mu - \mu' - 2b, \qquad 3c' = 6\mu' - \mu - 2b',$$
$$9p = \mu + 2\mu' + 16b + 2b', \qquad 9p' = \mu' + 2\mu + 16b' + 2b,$$
$$9q = 19\mu - \mu' - 8b + 2b', \qquad 9q' = 19\mu' - \mu - 8b' + 2b,$$
$$3v = 4\mu + 2\mu' - 2b', \qquad 3v' = 4\mu' + 2\mu - 2b,$$
$$3y = 2\mu + 2b, \qquad 3y' = 2\mu' + 2b',$$
$$9z = 8\mu - 2\mu' - 4b + b', \qquad 9z' = 8\mu' - 2\mu - 4b' + b,$$
$$3(de) = b + b',$$
$$9(d2e) = 4\mu - \mu' + b - b', \qquad 9(d'2e') = 4\mu' - \mu + b' - b,$$

og ved (25) og (26)

$$4[b] + 2[c] = y - 2[\gamma_1], \qquad 4[b']' + 2[c']' = y' - 2[\gamma_1]',$$
$$2[c] = z - [\beta'], \qquad 2[c']' = z' - [\beta]'.$$

Idet man ved Hjælp af det foregaaende kan bestemme β, β', γ_1 samt $[\beta]'$, $[\beta']$, $[\gamma_1]$ og $\gamma_1]'$, kan man finde alle de her anførte Tal for elementære Systemers Vedkommende paa samme Maade som i 35, idet ogsaa de her betragtede Kurver af fjerde Orden og Klasse ere «dualistiske». $(2e)$ kan ogsaa bestemmes direkte ved Hjælp af den Sætning, at der i et Keglesnitsystem (μ, μ') er $3(\mu\mu_1 + \mu'\mu_1')$ Keglesnit, som have Trepunktsrøring med Keglesnit i et andet System $(\mu_1 \mu_1')$.

Antallet af Kurver, der tilfredsstille en given Betingelse, udtrykkes her ved fire Tal (μ, μ', b, b'), saalænge Systemet kun indeholder sædvanlige særegne Kurver.

38. Systemer $n = 4$, $d = 2$, $e = 1$. — I disse Systemer er

$$\alpha_0 = \alpha_2 = \alpha' = \beta' = \gamma_0' = (2e) = (3d) = (d2e) = (3d') = (2d'e') = 0.$$

Kurverne γ_0 ere sammensatte af to Keglesnit. Restkurverne α_1, γ_1 og β ere de, der ere omtalte i 35, 36 og 37. Idet tillige $z = u' = 0$, finder man blandt andet

$$\mu' = 6\mu - 2b - 3c,$$
$$\alpha_1 = \mu - 2b + 4x,$$
$$\beta = 4\mu + b - 2x - 3y,$$
$$2\gamma_0 = 3\mu + b + c - 3x - 3y,$$
$$\gamma_1 = \mu - b - 2c + 2y.$$

Disse Formler kunne benyttes til Bestemmelse af Tallene μ, μ', b, c, x og y i de elementære Systemer, naar man blot først kjender én Karakteristik i ét af disse Systemer, hvorefter man ved de øvrige Formler i 24 kan finde de øvrige Tal p, q ...

Man finder saaledes

$$(2\,de) = b + c - x - y.$$

Denne sidste Formel kan ogsaa benyttes ved Karakteristikbestemmelsen, naar man forud har undersøgt de i flere Henseender simplere Systemer, hvor de tre særegne Punkter falde sammen [se Slutningsbemærkning i 57]. Antallet af Kurver, der tilfredsstille en given Betingelse, udtrykkes i Almindelighed ved 5 Tal (μ, b, c, x, y). — Formlerne (24) og (25) give

$$2\,[b] = x - [\alpha_1], \qquad 2\,[b] + 4\,[c] = y - 2\,[\gamma_1].$$

39. Systemer $n = 4$, $d = 3$, $e = 0$. — I disse Systemer er

$$\alpha_2 = \gamma = \alpha' = \beta' = \gamma' = (de) = (2\,e) = (2\,d\,e) = (d\,2\,e) = (3\,d') = (2\,d'e') = 0.$$

Kurverne α_0 ere sammensatte af 2 Keglesnit; Restkurverne α_1 og β ere de, som ere omtalte i 36 og 38. Desuden er $q = v = y = z = u' = 0$. De Formler, som vi skulle benytte ved Karakteristikbestemmelsen i de elementære Systemer, ere

$$\mu' = 6\,\mu - 2\,b,$$
$$\alpha_0 = 3\,\mu + b - 3\,x,$$
$$\alpha_1 = 3\,\mu - 4\,b + 4\,x,$$
$$(3\,d) = b - x,$$

idet vi da først maa bestemme Karakteristikerne i de elementære Systemer af Kurver med et tredobbelt Punkt (se 57). Man kunde forøvrigt ogsaa i Stedet for den sidste Formel have benyttet Formlen

$$\beta = 6\,\mu - 2\,x,$$

naar man forud havde bestemt Karakteristikerne i de i 38 omtalte Systemer. — Antallet af Kurver, der tilfredsstille en given Betingelse, afhænger af 3 Tal μ, b, x. Saaledes er:

$$(2\,d) = 4\,x - 2\,b.$$

Formlen 24 giver

$$4\,[b] = x - [\alpha_1].$$

40. Projektioner af plane Snit i en algebraisk Flade. — Vi skulle endnu her ved et Exempel vise, hvad vi angav i 24, at de der udviklede Formler ved Tilføjelse af supplementære Led ogsaa kunne gjøres anvendelige paa Systemer, som indeholde Kurver med Mangefoldsgrene, og at disse supplementære Led ikke ere vanskelige at bestemme, naar man blot fuldstændig kjender Egenskaberne ved de anførte særegne Kurver.

Et saadant Exempel faar man i det Kurvesystem, som dannes af Centralprojektionerne paa en Plan af en algebraisk Flades Skjæringslinier med Planerne i et Bundt. Vi indskrænke ikke Undersøgelsens Almindelighed ved at antage, at Projektionsplanen er en

Plan i Bundtet, medens Projektionscentret er vilkaarligt. Henføres Fladen til et Koordinattetraeder, som har et Hjørne i Projektionscentret P, og hvori Projektionsplanen samt den Plan, der projicerer Planbundtets Axe, ere Sideflader $u = 0$, $z = 0$, vil Systemet fremstilles ved selve Fladens Ligning, idet $\frac{u}{z} = k$ er den foranderlige Parameter. Som specielt Tilfælde haves parallele Snit og Parallelprojektion.

Vi tillægge her Fladen de samme Særegenheder som i mine Afhandlinger i *Mathematische Annalen* (1) med Undtagelse af de der omtalte koniske Punkter og de tilsvarende særegne Planer — altsaa ogsaa de vigtigste af dem, til hvilke Cayley tager Hensyn i sin Afhandling *On reciprocal surfaces* (2). (De i Parenthes tilføjede Betegnelser ere de, som jeg bruger paa det anførte Sted, og som omtrent falde sammen med Cayley's). Da er for det første

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha' = \beta' = \gamma' = 0;$$

$n = \mu$ Fladens Orden (n);

$d = b$ Dobbeltkurvens Orden (b);

$e = c$ Spidskurvens Orden (c);

$n' = \mu'$ Klassen af et plant Snit $(a = a')$;

b' Antallet af Dobbelttangenter, som skjære to givne rette Linier $(\delta + \delta')$;

c' Antallet af Hovedtangenter, som skjære to givne rette Linier $(\varkappa + \varkappa)$;

α_0 Fladens Klasse (n');

β Antallet af «Tangpunkter» (*pinch-points*; j);

γ Antallet af «*close-points* (χ);

$(2d)$ Dobbeltkurvens Klasse (q)
+ det dobbelte af Antallet af Røringspunkter mellem to Net (f);

(de) Antallet af saadanne Skjæringspunkter mellem Dobbeltkurven og Spidskurven, som ikke have nogen yderligere Særegenhed (i);

$(2e)$ Spidskurvens Klasse (r);

$(3d)$ Antallet af Dobbeltkurvens tredobbelte Punkter (t);

$(2de)$ Antallet af Dobbeltkurvens Spidser (γ);

$(d2e)$ Antallet af Spidskurvens Spidser (β).

Endvidere blive $(3d')$, $(2d'e')$, $(d'2e')$ Ordenen og Klassen af de vindskjæve Flader, som ere geometriske Steder for Linier, der have enten tre Røringer eller en Trepunktsrøring og en Topunktsrøring eller Firpunktsrøring med den givne Flade. — Betydningen af d' (δ'), e' $(\varkappa')$, p', q', u', v', x', y', z' forstaas af sig selv.

---

(1) 4de Bd. S. 1 og 633.

(2) *Philosophical Transactions* 1869.S. 201.

Kurvesystemet vil indeholde en Kurve, hvis Punkter falde sammen i en n'dobbelt ret Linie i Planbundtets Axe; men det ses i dette Tilfælde, at, idet en Kurve nærmer sig til denne Grænsestilling, blive alle dens Punkters og Liniers Afvigelser fra deres Grænsestillinger samtidig uendelig smaa af første Orden, nemlig naar den Plan, hvis Snit projiceres, danner en uendelig lille Vinkel af første Orden med den Plan i Bundtet, som gaar gjennem Projektionscentret [1]. Paa Grund heraf faar man for det første en simpel Angivelse af Betydningen af p, q ... ved at lade de Linier, hvis Antal betegnes saaledes, udgaa fra et Punkt af den særegne Kurve. Saaledes bliver

$p-2d$ Klassen af den udfoldelige Flade, der rører den givne langs Dobbeltkurven (ϱ);

$q-e$ Klassen af den udfoldelige Flade, der rører den givne langs Spidskurven (σ);

$x-\frac{d(d-1)}{2}$ Antallet af tilsyneladende Dobbeltpunkter paa Dobbeltkurven ($k-f-3t$; hos Cayley k);

$y-de$ Antallet af tilsyneladende Skjæringspunkter mellem Dobbeltkurven og Spidskurven;

$z-\frac{e(e-1)}{2}$ Antallet af tilsyneladende Dobbeltpunkter paa Spidskurven (h).

Man ser fremdeles, at den særegne Kurve ikke vil fremkalde nogen Ændring af Formlerne (3'), (4), (5), (6), (7), (8), men at den vil bevirke, at man i de øvrige Formler i 24 maa tilføje supplementære Led, nemlig

i (3), (4'), (5'), (6'), (7'), (8'), (9), (9'),
$n(n-1)$, nd', ne', $d'(d'-1)$, $d'e'$, $e'(e'-1)$, $n'(n-2)$, $n(n'-2)$,

(10), (10'), (11), (11'), (12), (12'), (13)
$d(n-2)$, $d'(n'-2)$, $e(n-2)$, $e'(n'-2)$, $n'(n-2)(n-3)$, $n(n'-2)(n'-3)$, $d(n-2)(n-3)$

(13'), (14), (14')
$d'(n'-2)(n'-3)$, $e(n-2)(n-3)$, $e'(n'-2)(n'-3)$.

De saaledes omformede Ligninger og de reciproke Ligninger — som man faar ved den tilsvarende Undersøgelse af det System, som dannes af en Plans Skjæringskurver med omskrevne Kegleflader med Toppunkter paa en ret Linie — ville blandt andet indbefatte Salmon's og Cayley's Relationer mellem Antallene af en Flades Særegenheder, paa én Relation nær [2]. Idet man ligeledes kan undersøge Systemet af Projektioner af

[1] Skal den her omtalte særegne Kurve svare til $k=0$, maa man i Fladens før omtalte Ligning sætte $\frac{u}{z}=\frac{1}{k}$.

[2] Hvorledes ogsaa denne kan bevises ved Korrespondanceprincipet, har jeg vist i min Note i *Mathematische Annalen* 4. Bd. 633.

Snit dannede af Dobbeltkurvens eller Spidskurvens oskulerende Planer o. s. v., og idet man paa disse og de ovenfor nævnte Systemer ogsaa kan anvende Undersøgelserne i 33, ses det, at Læren om Systemer af Kurver faar stor Betydning for en algebraisk Flades Undersøgelse. Resultaterne kunne specielt anvendes paa en udfoldelig Flade og en Kurve, og man vil da kunne komme til de Resultater, som jeg har fundet i min Afhandling om en Rumkurves og en udfoldelig Flades sædvanlige Særegenheder (1). Her at gaa nøjere ind paa disse stereometriske Anvendelser vilde føre os for vidt.

(1) *Annali di Matematica,* 2 Række 3die Bd. S. 175. Ogsaa dér benyttes Korrespondanceprincipet.

Tredie Afsnit.

Kurver med Mangefoldsgrene navnlig saadanne, som forekomme i Systemer af Kurver af tredie og fjerde Orden.

---

41. Første Art Kurver med en dobbelt retliniet Gren. — Idet vi først skulle undersøge saadanne Kurver, hvoraf en Del er en dobbelt ret Linie (i 47 en r-dobbelt ret Linie), ville vi lade denne falde i Linien $y = 0$. Vi ville ved de store Bogstaver A, B, C ... betegne Funktioner af x og y, og ved de tilsvarende smaa a, b, c ... de Funktioner af x, som man faar for $y = 0$. Ved tilføjede Mærketal angives den højeste Grad, hvortil disse Funktioner hæve sig med Hensyn til x og y. Ved ψ betegne vi som tidligere en Funktion af x, y og k, der ikke bliver uendelig for $k = 0$, idet k som forhen betegner Systemets Parameter.

Ligningen for et System, hvori $k = 0$ skal give en Kurve med dobbelt retliniet Gren, maa altid være af Formen

$$A_{n-2}y^2 + B_n k + \psi k^2 = 0. \tag{I}$$

Naar vi heraf for en vilkaarlig Værdi af x, der blot ikke gjør $a_{n-2} = 0$, ville finde de Værdier af y, som for $k = 0$ blive Nul, faa vi, saafremt blot y ikke er Faktor i B_n, første Led i Rækkeudviklingen efter Potenser af k bestemt ved

$$a_{n-2}y^2 + b_n k = 0 \text{ eller } y = \sqrt{-\frac{b_n}{a_{n-2}}}\,k^{\frac{1}{2}},$$

medens de andre Led derefter bestemmes ad rational Vej. Afstanden mellem de Grene, der nærme sig til $y = 0$, og deres Afstande fra denne deres Grænsestilling blive saaledes for lim. $k = 0$ proportionale med $k^{\frac{1}{2}}$, og eftersom $k \gtrless 0$ ville de Værdier af x, som gjøre $\frac{b_n}{a_{n-2}} \lessgtr 0$ give reelle Værdier af y, medens de, som gjøre $\frac{b_n}{a_{n-2}} \gtrless 0$, give imaginære Værdier. Overgangen sker gjennem de Værdier af x, som gjøre $b_n = 0$ eller $a_{n-2} = 0$. I disse Punkter maa — forsaavidt ikke flere af dem falde sammen og danne særegne Punkter — Grænsekurven ($k = 0$) røre Linierne $x =$ Konstant. Da nu en Ændring af Koordinatsystemet ($x = x' + \beta y'$, $y = y'$), hvorved Linien $y = 0$ bliver uforandret, medens Linien $x = 0$ drejes, ikke har Indflydelse paa $b_n = 0$ og $a_{n-2} = 0$, ses det, at Grænsekurven maa røre enhver Linie gjennem de herved bestemte Punkter. De ere altsaa i Almindelighed Toppunkter.

De ved $b_n = 0$ bestemte Toppunkter ere aabenbart enkelte. For at finde Beskaffenheden af dem, som bestemmes ved $a_{n-2} = 0$, ville vi antage, at Kurverne i Systemet og A_{n-2} ikke have særegne Punkter. Dette er her, hvor vi fremstille Kurverne ved Punktkoordinater, den mest almindelige Antagelse, til hvilken alle andre kunne henføres som specielle Tilfælde. De $n(n-1)$ Tangenter fra et Punkt til den særegne Kurve blive da 1) de $(n-2)(n-3)$ Tangenter til A_{n-2}, 2) de n Linier gjennem de ved $b_n = 0$ bestemte enkelte Toppunkter, 3) Linierne gjennem de ved $a_{n-2} = 0$ bestemte $n-2$ Skjæringspunkter mellem A_{n-2} og $y = 0$. Da nu

$$n(n-1) - (n-2)(n-3) - n = 3(n-2),$$

ses det, at disse sidste Toppunkter ere tredobbelte.

Dette ser man ad analytisk Vej derved, at disse Skjæringspunkters Afstande fra de nærmeste Punkter af den ved en uendelig lille Værdi af k bestemte Kurve, og derved ogsaa fra Tangenter i disse Punkter, i Almindelighed blive uendelig smaa af Ordenen $\frac{1}{3}$. Det ses da ogsaa, at blandt de tre Tangenter, der udgaa fra et givet Punkt og falde sammen i en Linie gjennem et af de tredobbelte Toppunkter, er kun den ene reel. (Se Fig. 23).

Man vil, som for Kurverne α_1' og α_2', finde, at Systemets Indhyllingskurve i Almindelighed har Dobbeltpunkter i de n enkelte Toppunkter (Punktet a paa Fig. 23). Derimod vil den ikke gaa gjennem de tredobbelte Toppunkter og ikke røre Linien $y = 0$.

Hvis Kurverne i Systemet og derfor ogsaa Grænsekurven $k = 0$ skulle have Dobbeltpunkter eller Spidser, opnaas dette for Grænsekurvens Vedkommende, dels derved at Restkurven A_{n-2} har saadanne, dels derved at Toppunkter falde sammen. Vi have allerede i det foregaaende havt Exempler herpaa i Kurverne α'. Skal (I) fremstille en Kurve α_2', maa $n-2$ af de ved $b_n = 0$ bestemte enkelte Toppunkter stykkevis falde sammen med de tredobbelte Toppunkter og danne to Dobbeltpunkter (Skjæringspunkter mellem de sammenfaldende Grene og Restkurven), hvorved der kun bliver to virkelige Toppunkter. Skal den fremstille en Kurve α_1' eller α_0', maa A_{n-2} røre $y = 0$ én eller to Gange, og i Røringspunktet maa desuden falde tre af Toppunkterne $b_n = 0$ for i Forening med de to sammenfaldende tredobbelte Toppunkter at danne tre Spidser. Idet der desuden som før skal falde et enkelt Toppunkt sammen med hvert af Skjæringspunkterne mellem A_{n-2} og y, bliver der kun ét eller intet virkeligt Toppunkt tilbage.

Man ser, at de her undersøgte Kurver ikke for $n > 2$ henhøre til de sædvanlige særegne Kurver i et System af Kurver af n'te Orden uden særegne Punkter. De Bestemmelser, ved Hjælp af hvilke man kan bringe dem til at gaa igjennem givne Punkter eller til at røre givne rette Linier, ere nemlig Bestemmelsen af Restkurven, af Dobbeltlinien og af de enkelte Toppunkter. Men disse Bestemmelsers Antal er kun

$$\frac{(n-2)(n+1)}{2} + 2 + n = \frac{n^2 + n + 2}{2} = \frac{n(n+3)}{2} - 1 - (n-2).$$

For $n = 2$ faar man Kurverne α_2'.

42. Anden Art Kurver med en dobbelt retliniet Gren. — Den i 41 anvendte Bestemmelse af y vil blive ubrugelig, naar B_n indeholder Faktoren y. Ligning (I) omskrives da helst til

$$A_{n-2}\, y^2 + 2\, B_{n-1}\, y \,.\, k + C_n \,.\, k^2 + \psi \,.\, k^3 = 0. \tag{II}$$

Første Led i Rækkeudviklingen for y efter Potenser af k bestemmes da for Værdier af x, der gjøre $a_{n-2} \gtrless 0$, ved Ligningen

$$a_{n-2}\, y^2 + 2\, b_{n-1}\, y\, k + c_n\, k^2 = 0, \tag{III}$$

saa de Grene, der nærme sig til at falde sammen, for lim. $k = 0$ faa Afstande fra deres Grænsestilling og indbyrdes, som ere uendelig smaa af første Orden. Disse Grene ere, uafhængigt af k's Fortegn, reelle eller imaginære, eftersom $b_{n-1}^2 - a_{n-2}\, c_n \gtrless 0$. Ligningen

$$b_{n-1}^2 - a_{n-2} \,.\, c_n = 0, \tag{IV}$$

vil bestemme $2(n-1)$ enkelte Toppunkter.

Vi kunne ved de Plücker'ske Formler bestemme, hvorvidt der i Almindelighed ogsaa falder Toppunkter i de ved $a_{n-2} = 0$ bestemte Skjæringspunkter mellem Restkurven $A_{n-2} = 0$ og Linien $y = 0$, idet vi forudsætte, at Systemets Kurver og Restkurven ikke have særegne Punkter. Det ses da, at de $n-2$ Linier fra et fast Punkt til disse Skjæringspunkter maa tælles som

$$n\,(n-1) - (n-2)\,(n-3) - 2\,(n-1) = 2\,(n-2)$$

Tangenter, saa hvert af de $n-2$ Skjæringspunkter mellem A_{n-2} og y maa være et dobbelt Toppunkt.

Det samme ses ad analytisk Vej. I et saadant Punkt er $a_{n-2} = 0$, medens vi forudsætte, at $b_{n-1} \gtrless 0$, da i modsat Fald et af de $2(n-1)$ enkelte Toppunkter bestemte ved (IV) faldt i samme Punkt. Ligning (III) giver da én Rod, som bestemmer første Led i en af de til dette Punkts Abscisse svarende Værdier af y. Denne bliver for lim. $k = 0$ uendelig lille af første Orden, og da den, naar x varierer, følger kontinuert paa andre uendelig smaa Værdier af y af samme Orden, faas herved en Gren som ikke danner noget Toppunkt. De andre Grene af den ved k bestemte Kurve, som nærme sig til dette Punkt for $k = 0$, maa, da den anden Rod i (III) bliver uendelig, bestemmes ved Værdier af y, hvis Rækker begynde med Potenser af k med lavere Exponent. For at bestemme dem tage vi dette Punkt til Begyndelsespunkt og Tangenten til Kurven A_{n-2} til Axe $x = 0$. Derved bliver

$$A_{n-2} = x + A_2 + A_3 + \dots.$$

Ligning (II) kan da omskrives til

$$y\,(x + A_2 + A_3 + \dots) + 2\, B_{n-1}\, k + \frac{k^2}{y}\, \psi = 0, \tag{V}$$

hvor ψ er en ny Funktion af x, y og k. Denne Ligning vil, saalænge y er uendelig lille af lavere Orden end k (altsaa ikke for den allerede undersøgte Gren), give en Rækkeudvikling for de Værdier af x, der ogsaa nærme sig til Nul, som begynder med samme Led, som om Ligningen havde været

$$y(x + A_2 + A_3 + \ldots) + 2B'.k = 0,$$

hvor B' er en Funktion af x og y med samme konstante Led som B_{n-1}, men som ellers er vilkaarlig. Den kan da bestemmes saaledes, at Ligningen ifølge 13 fremstiller et System, hvori $k = 0$ giver en Kurve α_1 (eller α_2). Vi kunne altsaa paa de Grene af Kurver i Systemet (V), som vi her undersøge, overføre, hvad der i 13 er bevist om de Stykker af Nabokurver til en Kurve α_1, som bestemmes ved Værdier af y, som ere uendelig smaa af lavere Orden end første. Vi se saaledes, at ogsaa her to Grene, foruden den før nævnte, nærme sig til Begyndelsespunktet, som bliver et dobbelt Toppunkt paa Grænsekurven, at Afstandene fra Begyndelsespunktet til de to Grene og til Tangenterne fra et vilkaarligt Punkt blive uendelig smaa af Ordenen $\frac{1}{2}$, og at de, naar Restkurven ikke er en ret Linie, (tilsammen) have tre Vendetangenter, som med Linien $x = 0$ danne Vinkler af Ordenen $\frac{1}{3}$, medens deres Røringspunkter bestemmes ved Værdier af x og y, som ere uendelig smaa af Ordenerne $\frac{2}{3}$ og $\frac{1}{3}$, samt at Kurverne (c') og (q') røre Linien $x = 0$ i Begyndelsespunktet. — Fremdeles vil — idet vi have forudsat, at $x = 0$ ikke gjør $b_{n-1} = 0$ — ingen Gren af Systemets Indhyllingskurve gaa gjennem dette dobbelte Toppunkt. Derimod vil Indhyllingskurven gaa gjennem de ved (IV) bestemte enkelte Toppunkter og røre Dobbeltlinien $y = 0$ i de ved $c_n = 0$ bestemte n Punkter.

Da man ved at disponere over Restkurven A_{n-2}, over Dobbeltlinien og de $2(n-1)$ enkelte Toppunkter kan bringe denne Kurve til at tilfredsstille

$$\frac{(n-2)(n+1)}{2} + 2 + 2(n-1) = \frac{n(n+3)}{2} - 1$$

elementære Betingelser, hører den ved Ligning (II) fremstillede anden Art af Kurver med en dobbelt retliniet Gren med til de sædvanlige særegne Kurver i Systemer af Kurver uden særegne Punkter, men af en hvilkensomhelst Grad. Deres Antal ville vi betegne ved $\mathfrak{x}$. — For $n = 2$ ere disse Kurver dog kun en ny Fremstilling af Kurver α_2' og behøve derfor ikke noget nyt Navn.

For $n = 3$ faas en Grænsekurve sammensat af en enkelt ret Linie og en Dobbeltlinie med 4 enkelte Toppunkter. I denne falde alle 8 Vendetangenter sammen. — For $n = 4$ bliver Restkurven et Keglesnit, og Dobbeltlinien faar 6 enkelte Toppunkter. Af Vendetangenterne falde, som sagt, 3 sammen i Restkurvens Tangenter i hvert af de dobbelte Toppunkter, medens de 18 andre falde i Dobbeltlinien. Af Dobbelttangenterne ere de 12 Tangenter fra Toppunkter til Restkurven; de 16 andre falde i Dobbeltlinien.

I Fig. 24 og 25 fremstiller 2 en Kurve ξ sammensat af et Keglesnit og en Dobbeltlinie, der danner Overgangen mellem to Kurver 1 og 3 af fjerde Orden. Bogstaverne a betegne de enkelte Toppunkter paa 2. Det ses, at 1 og 3, naar Overgangskurven er den samme, kunne have to væsentlig forskjellige Former, eftersom Grenene paa en af dem i Nærheden af de to dobbelte Toppunkter ere beliggende paa samme Maade (Fig. 25) eller paa modsat Maade (Fig. 24) i Forhold til Grænsekurven. Havde Kurverne i Systemet været af n'te Orden, havde man faaet 2^{n-3} forskjellige Former.

Naar som paa vore Figurer baade de dobbelte og de enkelte Toppunkter alle ere reelle, og intet af de enkelte Toppunkter skiller de dobbelte, maa Kurven 1 (og 3) bestaa dels af to adskilte Dele, hvoraf Buer nærme sig til Keglesnittet, dels af to flade Ovaler. Figurerne vise, at enten den ene af de førstnævnte Dele har mindst to Dobbelttangenter (Fig. 24), eller at de hver have én (Fig. 25). Disse ville tilsammen med de $\frac{4.3}{2}.4 = 24$ Fællestangenter til de fire adskilte Dele give 26 reelle Dobbelttangenter. I saa Fald véd man(1), at de to andre ogsaa maa være reelle, om de end ikke have reelle Røringspunkter. Paa Fig. 24 er dette kun Tilfældet med den ene, idet den Del af Kurven, som har to indadgaaende Buer, har faaet en tredie svagt indadgaaende Bue langs Dobbeltlinien. Paa Fig. 25 have alle 28 Dobbelttangenter reelle Røringspunkter, idet Ovalerne have faaet svagt indadgaaende Buer. Idet alle de fire Dele, hvoraf Kurven 1 eller 3 paa Fig. 25 ere sammensatte, have indadgaaende Buer, ere disse Dele væsentligt de samme som de, hvoraf den Kurve er sammensat, som Plücker(2) benytter til at vise, at alle 28 Dobbelttangenter kunne være reelle. — Af Vendetangenterne ere paa Fig. 24 kun 6 og paa Fig. 25 kun 8 reelle.

Det ses let ved Tegning, at der altid maa ligge et lige Antal enkelte Toppunkter paa hvert af de to Stykker, hvori de dobbelte Toppunkter dele den uendelige Dobbeltlinie. Hvis man i Stedet for som her at have 6 paa det ene, intet paa det andet, havde havt 4 paa det ene, 2 paa det andet(3), kunde kun 8 Dobbelttangenter have reelle Røringspunkter, idet Kurven vilde bestaa af to Dele, hvoraf den ene med fire indadgaaende Buer vilde have 4, den anden, en Oval, ingen Dobbelttangenter. Disse Antydninger vise, hvilken Brug man kan gjøre af Grænsekurverne ved Studiet af Udseendet af Kurver af fjerde Orden.

Medens der paa en Kurve ξ, som skal henhøre til de sædvanlige særegne Kurver i et System af Kurver uden særegne Punkter, ikke falder Toppunkter sammen, kan dette selvfølgelig være Tilfældet, naar enten Kurverne i Systemet skulle have særegne Punkter, eller naar den særegne Kurve ikke skal høre til de «sædvanlige». Vi skulle, hvad angaar det første Tilfælde, senere enkeltvis angive specielle Former af Kuverne ξ, som benhøre til elementære Systemer af fjerde Orden med Dobbeltpunkter. Her skulle vi angaaende det sidste Tilfælde kun bemærke, at naar $n-2$ af de enkelte Toppunkter stykkevis falde sammen med de $n-2$ dobbelte Toppunkter, vil Ligning (II), hvor da a_{n-2} maa gaa op i b_{n-1}, kun give en ny Fremstilling af den i 41 omtalte første Art af Kurver med en dobbelt retliniet Gren, eller rettere sagt fremstille et System, hvis Kurver for lim. $k = 0$ paa en ny Maade nærme sig til denne Art Grænsekurver. Denne Fremstillingsmaade maa benyttes, naar Dobbeltlinien skal røre Systemets Indhyllingskurve (specielt gaa gjennem et givet Punkt). De Grene, der nærme sig til et af de tredobbelte Toppunkter,

(1) Plücker; *Theorie der algebraischen Curven* II 122.

(2) *Theorie der algebraischen Curven* II 115.

(3) Man bedes selv at danne sig en Figur.

faa for lim. $k = 0$ Afstande derfra, som ere proportionale med $k^{\frac{2}{3}}$, og Indhyllingskurven vil ikke gaa gjennem disse. Den gaar derimod igjennem hvert af de enkelte Toppunkter. (Smlgn. 14 for Kurverne α''s Vedkommende).

43. Nye Fremstillinger af første og anden Art af Kurver med en dobbelt retliniet Gren. — Udviklingerne i 42 blive ubrugelige, naar Ligning (IV), der skulde bestemme de enkelte Toppunkter, er identisk. Dette kan i Almindelighed finde Sted paa flere forskjellige Maader, blandt disse ogsaa derved, at

$$b_{n-1} = a_{n-2} \,.\, b_1 \,;\; c_n = a_{n-2} \,.\, b_1{}^2, \tag{VI}$$

og dette er, naar $n = 2$ eller $n = 3$, den eneste Maade[1]. Ligning (II) reduceres derved til Formen

$$A'_{n-2}\, y'^2 + 2\, B'_{n-1}\, y' k^2 + C'_n k^3 = 0, \tag{VII}$$

hvor

$$y' = y + b_1 k, \tag{VIII}$$

og hvor A', B' og C' betegne Funktioner af x og y' samt k, men som ikke ere delelige med k, og blandt hvilke i alt Fald A'_{n-2} ikke bliver Nul for $y' = 0$, $k = 0$. Ved A, B og C betegne vi saa nu de Funktioner af x og y, som dannes ved i A', B' og C' at sætte $k = 0$. a, b og c dannes som før af A, B og C ved at sætte $y = 0$. Paa Grund af, at C' indeholder k, behøve vi ikke her som før at tilføje et Restled ψ. Første Led i Rækkeudviklingen for y' bestemmes ved

$$a_{n-2}\, y'^2 + c_n k^3 = 0 \text{ eller } y' = \pm \sqrt{-\frac{c_n}{a_{n-2}}}\, k^{\frac{3}{2}}.$$

Det ses da, at Grænsekurven $A_{n-2}\, y^2 = 0$ har n enkelte Toppunkter bestemte ved $c_n = 0$ og tredobbelte Toppunkter i Skjæringspunkterne mellem A_{n-2} og $y = 0$, saa denne Kurve hører til første Art, saafremt blot y ikke er Faktor i C_n.

Er y Faktor i C_n, kan Ligningen (VII), idet da alle Led i C'_n blive delelige enten med y' eller med k, omkrives til Formen

$$A'_{n-2}\, y'^2 + 2\, B'_{n-1}\, y' k^2 + C'_n k^4 = 0, \tag{IX}$$

som i Almindelighed giver en ny Fremstilling af anden Art Kurver med en dobbelt retliniet Gren (i specielle Tilfælde af første), idet de enkelte Toppunkter bestemmes ved

$$b_{n-1}^2 - a_{n-2}\, c_n = 0.$$

Kun naar denne Ligning bliver identisk, vil dette ikke mere være Tilfældet. Hvis Identiteten som i (VI) hidrører fra, at

$$b_{n-1} = a_{n-2} \,.\, b_1{}' ;\; c_n = a_{n-2} \,.\, b_1{}'^2,$$

---

[1] Var $a_{n-2} = 0$, vilde nemlig $y = 0$ være en tredobbelt Gren.

hvor b_1' blot betegner en ny Funktion af første Grad af x, kan Ligningen paany omskrives til Formen

$$A''_{n-2}\, y''^2 + 2\, B''_{n-1} y''\, k^3 + C''_n\, k^5 = 0, \tag{X}$$

idet

$$y'' = y' + b_1' k^2 = y + b_1 k + b_1' k^2, \tag{XI}$$

og idet A'', B'' og C'' betegne Funktioner af x, y'' og k, som ikke ere delelige med k. (X) behandles som (VII) og fremstiller en Kurve af første Art.

Ved Fortsættelse af samme Fremgangsmaade vil man, naar Grunden til, at Ligningerne $b_{n-1}{}^2 - a_{n-2}\, c_n = 0$ blive identiske, stadigt er den i (VI) antagne, afvexlende finde Ligninger af følgende to Former:

$$A^{(r)}_{n-2}\, y^{(r)2} + 2\, B^{(r)}_{n-1}\, y^{(r)}\, k^{r+1} + C^{(r)}_n\, k^{2r+1} = 0 \tag{XII}$$

og

$$A^{(r)}_{n-2}\, y^{(r)2} + 2\, B^{(r)}_{n-1}\, y^{(r)}\, k^{r+1} + C^{(r)}_n\, k^{2r+2} = 0, \tag{XIII}$$

hvor

$$y^{(r)} = y + b_1\, k + b'_1\, k^2 + \ldots .\, b_1{}^{(r-1)}\, k^r, \tag{XIV}$$

og hvor $A^{(r)}$, $B^{(r)}$ og $C^{(r)}$ betegne Funktioner af x, $y^{(r)}$ og k, som ikke ere delelige med k. Ligning (XII) fremstiller Kurver, der for lim. $k = 0$ nærme sig til en Kurve med dobbelt retliniet Gren af første Art, og hvori de Grene, der nærme sig til at falde sammen, have Afstande indbyrdes og fra den rette Linie $y^{(r)} = 0$, som ere proportionale med $k^{\frac{2r+1}{2}}$, medens deres Afstande fra Grænsestillingen $y = 0$ ere proportionale med k. Ligning (XIII) fremstiller Kurver, der for lim. $k = 0$ nærme sig til Kurver med en dobbelt retliniet Gren af anden Art (eller hvis a_{n-2} gaar op i b_{n-1}, af første Art), og hvori de Grene, der nærme sig til at falde sammen, have Afstande indbyrdes og fra Linien $y^{(r)} = 0$, som ere proportionale med k^{r+1}, medens deres Afstande fra Grænsestillingen $y = 0$ ere proportionale med k. Slutningerne af disse Regler ville dog ofte undergaa Modifikationer, idet Koefficienter i Udtrykket (XIV) for $y^{(r)}$ forsvinde. Dette vil saaledes finde Sted i (XIII), naar Systemets Kurver skulle gaa gjennem to Punkter af Linien $y = 0$ — altsaa endog i elementære Systemer — eller mere almindeligt, naar Systemets Indhyllingskurve skal røre denne i to Punkter: i saa Fald maa man identisk have $b_1 = 0$, $b_1' = 0$, $\ldots b_1{}^{(r-1)} = 0$; thi ellers vilde det første af disse Udtryk af første Grad, som ikke var Nul, bestemme det eneste Røringspunkt mellem $y = 0$ og Indhyllingskurven (idet vi bortse fra, at, naar $b_1 = 0$, Linien $y = 0$ selv vil udgjøre en Del af Indhyllingskurven). Ere derimod disse Betingelser opfyldte, ville Røringspunkterne mellem $y = 0$ og Indhyllingskurven bestemmes ved $C_n{}^{(r)} = 0$ og have Antallet n. I saa Fald bliver y af Ordenen $r + 1$.

Vi skulle med Hensyn til Undersøgelsen af de tredobbelte og dobbelte Toppunkter nøjes med at betragte Kurver af første Art fremstillede ved (VII) og Kurver af anden Art fremstillede ved (IX). I begge Tilfælde ville vi antage, at vedkommende Toppunkt ligger i

Begyndelsespunktet, og at $x = 0$ er Tangent til Restkurven A_{n-2}, altsaa at $A_{n-2} = x + A_2 + \ldots$, medens

$$A'_{n-2} = x + A'_2 + \ldots + k\,(a + \ldots).$$

Ligningen for en ret Linie gjennem Begyndelsespunktet bliver

$$x = \alpha y = \alpha(y' - b_1 k).$$

Idet vi nu ved b_0 betegne det konstante Led i b_1, og ved b og c de konstante Led i B_{n-1} og C_n, findes første Led i de Rækkeudviklinger, der give de Værdier af y, som svare til de Skjæringspunkter mellem $x = \alpha y$ og Kurven (VII), som for $k = 0$ falde i Begyndelsespunktet, ved en Ligning af Formen

$$\alpha y'^3 + (-\alpha b_0 + a)\,k y'^2 + 2 b k^2 y' + c k^3 = 0. \qquad \text{(XV)}$$

Disse Værdier af y' og dermed de tilsvarende af x og y og altsaa Afstandene fra Begyndelsespunktet til de tre Grene, som nærme sig dertil for lim. $k = 0$, blive saaledes uendelig smaa af første Orden.

Ligning (XV) faar lige Rødder, naar enten $\alpha = \infty$ eller

$$\begin{vmatrix} 3\alpha, & 2(-\alpha b_0 + a), & 2b, & 0 \\ 0, & 3\alpha, & 2(-\alpha b_0 + a), & 2b \\ -\alpha b_0 + a, & 4b, & 3c, & 0 \\ 0, & -\alpha b_0 + a, & 4b, & 3c \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(XVI)}$$

Den sidste Ligning, som bliver af tredie Grad med Hensyn til α, bestemmer Tangenterne til tre Grene af Systemets Indhyllingskurve, som gaa gjennem det tredobbelte Toppunkt (smlgn. 11), medens $\alpha = \infty$ kun bestemmer Linien $y = 0$, af hvis Skjæringspunkter med Kurven i Almindelighed kun ét Punkt for $k = 0$ falder i Begyndelsespunktet. Kun naar $b_0 = 0$, bliver $y = 0$ Tangent i Begyndelsespunktet til Indhyllingskurven (eller Gren af denne); men da bliver ogsaa en af de tre Rødder i (XVI) uendelig. Fremstillingsformen (VII) for Kurver af første Art kan saaledes benyttes, naar Systemets Indhyllingskurve skal gaa igjennem det tredobbelte Toppunkt, hvilket ikke var Tilfældet med de tidligere Fremstillingsformer (I) og (II). Kjender man Tangenten til en af Indhyllingskurvens Grene, og er altsaa en Rod α i (XVI) bekjendt, kunne Koefficienterne a, b og c udtrykkes under rational Form ved α og b_0 samt to ubekjendte Konstanter β og γ, idet man har

$$\alpha\,(y' - \beta k)^2 (y' - \gamma k) = \alpha y'^3 + (-\alpha b_0 + a)\,k y'^2 + 2 b k^2 y' + c k^3.$$

(Smlgn. 12) [1]).

([1]) Andre Exempler paa Tilfælde, hvor (VII) eller andre under (XII) og (XIII) henhørende Ligninger maa anvendes, frembyder min Afhandling: *Nyt Bidrag til Læren om Systemer af Keglesnit*, idet de til Keglesnittene henhørende Dobbeltlinier med to Toppunkter (λ kaldes deres Antal i den anførte Afhandling) som Kurver α_2' høre med til de ved disse Ligninger fremstillede Kurver af første Art. Naar saaledes en Dobbeltlinie, der rører en given Kurve og har et Toppunkt beliggende i

Naar man vil benytte den samme Fremgangsmaade til Undersøgelse af et dobbelt Toppunkt paa en Kurve af anden Art fremstillet ved (IX), maa man ombytte Ligning (XV) med følgende

$$\alpha y'^3 + (-\alpha b_0 + a) k y'^2 + 2 b k^2 y' + c k^4 = 0,$$

som dels giver $y' = -\frac{c}{2b} k^2$, der blot svarer til den Gren, som ikke medvirker til Dannelsen af Toppunktet, dels

$$\alpha y'^2 + (-\alpha b_0 + a) k y' + 2 b k^2 = 0.$$

Denne Ligning faar lige Rødder, naar

$$8 b \alpha = (\alpha b_0 - a)^2,$$

som bestemmer to Værdier af α. To Grene af Indhyllingskurven gaa altsaa gjennem det dobbelte Toppunkt. Man kan saaledes benytte Fremstillingen (IX) af Kurverne af anden Art, naar Systemets Indhyllingskurve skal gaa igjennem et dobbelt Toppunkt. En Kurve fremstillet ved Ligning (IX) tælles to Gange med i Tallet ξ. (Smlgn. 11—13 og Bemærkningen i 42 om Ensartetheden af de dobbelte Toppunkter paa Kurverne ξ og paa Kurverne α_1 eller α_2).

44. Tredie Art Kurver af fjerde Orden med en dobbelt retliniet Gren. — Ligning (II) i 42

$$A_{n-2} y^2 + 2 B_{n-1} y k + C^n k^2 + \psi k^3 = 0$$

fremstillede, som vi saa i 42, Kurver med dobbelt retliniet Gren af anden Art (specielt første), naar Ligning (IV)

$$b_{n-1}^2 - a_{n-2} \cdot c_n = 0,$$

der bestemte dens enkelte Toppunkter, ikke var identisk. At denne Ligning bliver identisk, kan, naar $n > 3$, opnaas paa andre Maade end antaget i (VI). Det vil saaledes, naar Kurverne ere af fjerde Orden ($n = 4$), et Tilfælde, hvortil vi her udelukkende skulle holde os, endnu opnaas paa én Maade, nemlig ved at

$$a_2 = a_1{}^2, \; b_3 = a_1 b_2, \; c_4 = b_2{}^2. \qquad \text{(XVII)}$$

Ligning (II) bliver derved til

$$(a_1 y + b_2 k)^2 + C_1 y^3 + C_2 y^2 k + C_3 y k^2 + C_4 k^3 + \psi \cdot k^4 = 0. \qquad \text{(XVIII)}$$

Denne Ligning giver som første Led i Rækkeudviklingen for de Værdier af y, der

Røringspunktet (se 61 i den nævnte Afh.), skal høre med til et System af Keglesnit, som have Røring af anden Orden med denne Kurve, maa Systemet fremstilles ved Ligning (VII), hvilket staar i nøje Forbindelse med, at denne særegne Kurve tælles 3 Gange med i λ, en Omstændighed, jeg paa det anførte Sted har fundet ad mere indirekte Vej. Systemets andre Betingelser kunne selvfølgelig medføre, at man maa benytte en endnu senere Ligning (XII) eller (XIII), samt at den særegne Kurve tælles flere Gange med i λ.

blive Nul for $k = 0$, $y = -\frac{b_2}{a_1} k$. For at bestemme andet Led maa man medtage de Led i Ligningen, som ere af tredie Grad med Hensyn til y og k, og i dem for y indsætte det fundne første Led. Man finder da det andet Led bestemt ved

$$a_1 y + b_2 k = \frac{1}{a_1}\sqrt{\frac{b_2{}^3 c_1 - a_1 b_2{}^2 c_2 + a_1{}^2 b_2 c_3 - a_1{}^3 c_4}{a_1}}\, k^{\frac{3}{2}}.$$

Det ses nu, at den ved $k = 0$ bestemte Kurve i Systemet (XVIII)

$$y^2 (a_1{}^2 + y C_1) = 0$$

er sammensat af en dobbelt ret Linie $y = 0$ og af et Keglesnit $a_1{}^2 + y C_1 = 0$, der rører Dobbeltlinien i Punktet $y = 0$, $a_1 = 0$; at de Grene af en nærliggende Kurve bestemt ved lim. $k = 0$, som nærme sig til Linien $y = 0$, have Afstande fra denne Linie, som ere uendelig smaa af første Orden, men Afstande indbyrdes og fra Hyperblen

$$a_1 y + b_2 k = 0,$$

som ere uendelig smaa af Ordenen $\frac{3}{2}$; og endelig at Grænsekurvens Dobbeltlinie har 7 enkelte Toppunkter bestemte ved

$$b_2{}^3 c_1 - a_1 b_2{}^2 c_2 + a_1{}^2 b_2 c_3 - a_1{}^3 c_4 = 0, \tag{XIX}$$

samt et tredobbelt Toppunkt i Dobbeltliniens Røringspunkt med Restkurven. At dette sidste Toppunkt bliver tredobbelt, følger af, at Tangenter fra et Punkt til Restkurven og Linier til de 7 enkelte Toppunkter kun give 9 af de 12 Tangenter til Kurven.

Naar k skifter Fortegn, idet det passerer Nul, ville de Grene, der nærme sig til $y = 0$, blive reelle langs de Strækninger af denne Linie, hvor de før vare imaginære, og omvendt. Saavel det tredobbelte som de enkelte Toppunkter danne Overgangen mellem disse Strækninger.

De Grene af Kurven (XVIII), som for lim. $k = 0$ nærme sig til at gaa gjennem det tredobbelte Toppunkt $a_1 = 0$, $y = 0$, ville skjære Linien $a_1 = 0$ i tre Punkter, hvis Afstande fra Toppunktet ere proportionale med $k^{\frac{2}{3}}$, og $a_1 = 0$ kan være en vilkaarlig fra $y = 0$ forskjellig ret Linie gjennem dette Punkt, idet Ombytning af a_1 med $a_1 + \alpha y$, hvor α er en Konstant, ikke vil forandre Ligningens Form. Idet vi fremdeles kunne antage, at der er anvendt Trekantkoordinater, kan Punktet $a_1 = 0$, $y = \infty$ være et vilkaarligt Punkt udenfor Linien $y = 0$. Koordinaterne til Røringspunkter for Tangenter fra dette Punkt, ville bestemmes ved (XVIII) og den Ligning, som dannes ved Differentiation med Hensyn til y. Første Led i Koordinaterne til de Røringspunkter, som for $k = 0$ falde sammen i det tredobbelte Toppunkt, bestemmes altsaa ved

$$(a_1 y + b_2 k)^2 + c_1 y^3 = 0,$$

og

$$2 (a_1 y + b_2 k) a_1 + 3 c_1 y^2 = 0,$$

hvor c_1 og b_2 have de Værdier, som de faa for $a_1 = 0$. Man finder

$$a_1 = 3\sqrt[3]{\frac{b_2 c_1}{4}}.k^{\frac{1}{3}}, \quad y = -\frac{4}{9}\frac{a_1^2}{c_1},$$

som blive proportionale med $k^{\frac{1}{3}}$ og $k^{\frac{2}{3}}$. Det viser sig saaledes, at de tre Tangenter fra et vilkaarligt Punkt, som nærme sig til at falde sammen i Punktets Forbindelseslinie med det tredobbelte Toppunkt, danne Vinler med denne Grænsestilling, som for lim. $k = 0$ blive uendelig smaa af Ordenen $\frac{1}{3}$. Der vil altsaa kun være én af dem, som er reel.

Paa Grund af Kurvens Beliggenhed mod Hyperblen $a_1 y + b_2 k = 0$ samt Restkurvens Form blive Grænsestillingerne for alle Vendetangenters Røringspunkter det tredobbelte og de enkelte Toppunkter. I hvert af disse vil der falde tre saadanne Røringspunkter sammen, hvoraf ét er reelt, naar Toppunktet er det. [Se 51]. Af Dobbelttangenterne ville de 7 være Tangenter fra de enkelte Toppunkter til Restkurven. De 21 andre falde sammen med Dobbeltlinien og have Toppunkterne til Røringspunkter.

Et Keglesnit, en Tangent til samme og 7 Punkter paa denne afhænge af 13 Betingelser. Da disse kunne være elementære, vil den her beskrevne tredie Art af Kurver med en dobbelt retliniet Gren være sædvanlige særegne Kurver i et System af Kurver af fjerde Orden uden særegne Punkter. Vi ville betegne Antallet af saadanne Kurver i et System ved η.

Paa Fig. 26 er 2 en saadan Overgangskurve mellem 1 og 3. Kurven h er Hyperblen $a_1 y + b_2 k = 0$. Vi have antaget, at alle 7 enkelte Toppunkter a ere reelle, hvorved ogsaa alle Dobbelttangenterne til Kurver 1 og 3, der ligge tilstrækkelig nær ved Grænsekurven, maa være reelle. Idet de flade Ovaler faa indadgaaende Buer, bestaa Kurverne væsentligt af samme Dele som paa Fig. 25.

45. Fjerde Art Kurver af fjerde Orden med en dobbelt retliniet Gren. — Den i 44 anvendte Diskussion af Ligning (XVIII) bliver ubrugelig, naar Ligning (XIX), der bestemmer dens enkelte Toppunkter, bliver identisk. Da man finder denne Ligning ved for y og k at sætte b_2 og $-a_1$ i Ligning

$$c_1 y^3 + c_2 y^2 k + c_3 y k^2 + c_4 k^3 = 0,$$

maa $a_1 y + b_2 k$ være Faktor i denne Lignings venstre Side (da man kan forudsætte, at a_1 ikke gaar op i b_2, idet Ligning (XVIII) i saa Fald vilde være indbefattet i (VII)). Ligning (XVIII) maa saaledes kunne omskrives til

$$(a_1 y + b_2 k)^2 + 2(c_0 y^2 + c_1 y k + c_2 k^2)(a_1 y + b_2 k) + d_0 y^4 + D_1 y^3 k + D_2 y^2 k^2 + D_3 y k^3 + D_4 k^4 + \psi . k^5 = 0. \quad \text{(XX)}$$

Udvikles her de Værdier af y, som forsvinde for $k = 0$, i Række, finder man, at de to første Led ere følgende

$$a_1 y = -b_2 k - \frac{1}{a_1^2}(b_2^2 c_0 - a_1 b_2 c_1 + a_1^2 c_2 \pm \sqrt{R})k^2,$$

hvor

$$R=(b_2{}^2c_0-a_1b_2c_1+a_1{}^2c_2)^2-(b_2{}^4d_0-a_1b_2{}^3d_1+a_1{}^2b_2{}^2d_2-a_1{}^3b_2d_3+a_1{}^4d_4). \quad \text{(XXI)}$$

Den ved $k=0$ bestemte Grænsekurve

$$y^2(a_1{}^2+2c_0a_1y+d_0y^2)=0$$

er sammensat af en dobbelt ret Linie $y=0$ og af to enkelte rette Linier, som begge skjære Dobbeltlinien i Punktet $y=0$, $a_1=0$. Den har 8 enkelte Toppunkter bestemte ved $R=0$ og et firdobbelt Toppunkt i Skjæringspunktet mellem de sammensættende rette Linier. De Grene af en nærliggende Kurve bestemt ved lim. $k=0$, som nærme sig til Linien $y=0$, have Afstande fra denne Linie, som ere uendelig smaa af første Orden, men Afstande indbyrdes og fra Hyperblen

$$a_1y+b_2k=0,$$

som ere uendelig smaa af anden Orden. Naar k skifter Fortegn, ville disse Grene vedblive at være reelle eller imaginære langs de samme Strækninger af $y=0$. Grænserne mellem disse Strækninger dannes her kun af de enkelte Toppunkter. — I hvert af de enkelte Toppunkter falde Røringspunkterne for tre Vendetangenter sammen (se 44 og 51). Alle 28 Dobbelttangenter falde sammen med den dobbelte retliniede Gren, dens Røringspunkter med de enkelte Toppunkter.

Det firdobbelte Toppunkt kunde undersøges paa samme Maade som det tredobbelte i 44; men dets Egenskaber fremtræde simplere, naar man lægger Mærke til, at de Led i (XX), der her komme i Betragtning, idet vi antage, at

$$a_1{}^2+2c_0a_1y+d_0y^2=(a_1+a_0y)(a_1+b_0y),$$

kunne omskrives til

$$[(a_1+a_0y)y+b_2k][(a_1+b_0y)y+b_2k]=0,$$

som fremstiller to Hyperbler, der for $k=0$ gaa over til to rette Linier (Kurver α_2), og som for lim. $k=0$ have Afstande af Ordenen $\frac{1}{2}$ fra disses Skjæringspunkt. Disse Hyperbler have begge samme Beliggenhed i Forhold til Linien $y=0$. I Nærheden af det firdobbelte Toppunkt faar Kurven (XX) samme Egenskaber som disse Hyperbler, og det firdobbelte Toppunkt er altsaa sammensat af to dobbelte.

Det ses let, at ogsaa de her fremstillede Grænsekurver høre med til de sædvanlige særegne Kurver i et System af Kurver af fjerde Orden uden særegne Punkter. Vi ville kalde Antallet af saadanne Kurver i et System ζ.

Paa Fig. 27 er 2 en Overgangskurve af den her beskrevne Art mellem 1 og 3. Idet vi have forudsat, at alle de enkelte Toppunkter a, og derved alle Dobbelttangenter, ere reelle, ses det, at Kurverne 1 og 3 bestaa af de samme Dele som paa Fig. 26. Kun har, samtidig med at Keglesnittet i Grænsekurven er blevet til to rette Linier, den Del af Kurven 1 eller 3, som nærmer sig dertil, faaet to flade Arme i Stedet for én, dog selvfølgelig uden at forandre Antallet af reelle Dobbelt- og Vendetangenter.

Den her anstillede Undersøgelse bliver ubrugelig, naar R (se (XXI)) identisk forsvinder. I dette Tilfælde omformes (XX) paa en lignende Maade, som (XX) er dannet af (XVIII). Den Art Grænsekurver, som man da faar, vil være sammensat af to rette Dobbeltlinier og have 8 enkelte Toppunkter paa den ene af disse, intet paa den anden. Da disse særegne Kurver kun kunne tilfredsstille $4 + 8 = 12$ elementære Betingelser, høre de ikke med til de sædvanlige særegne Kurver. Fortsættelse af den her anvendte Behandling giver kun nye Fremstillinger af disse samme Kurver.

Vi kunne ogsaa se, at vi hermed overhovedet have udtømt de forskjellige Arter af Kurver med en dobbelt retliniet Gren, som man kan træffe paa i Systemer af Kurver af fjerde Orden uden særegne Punkter. Den i 42 udførte Undersøgelse af Ligning (II) ophører nemlig kun da at være brugelig, naar enten Betingelserne (VI) eller (XVII) ere opfyldte. De Tilfælde, som Betingelserne (XVII) føre til, have vi nu udtømt i 44 og her i 45. (VI) førte, som vi have set, foruden til de mere specielle Kurver af første Art, til de nye Fremstillinger (IX) og derefter (XIII) af Kurverne af anden Art; men derved forudsatte vi rigtignok stadig, at $b_{n-1}^2 - a_{n-2}\,c_n = 0$ kun blev identisk derved, at $b_{n-1} = a_{n-2} . b_1$, $c_n = a_{n-2} . b_1^2$. Naar vi nu for Ligning (IX)'s og den mere almindelige Ligning (XIII)'s Vedkommende ogsaa forudsætte, at det finder Sted paa den anden Maade, som er mulig, naar $n = 4$, nemlig ved $a_2 = a_1^2$, $b_3 = a_1 b_2$, $c_4 = b_2^2$ som i (XVII), er det at vente, at vi, da (IX) og (XIII) væsentlig ere af samme Form som (II), kun komme til saadanne nye Fremstillinger af Kurverne af tredie og fjerde Art, som blot medføre Forandringer i Ordenerne af uendelig smaa Afstande fra Grænsekurven. Dette vil ogsaa vise sig at være Tilfældet, naar man gjennemfører Undersøgelsen, idet man dog, førend man naar til nye Fremstillinger af de almindeligste Former af disse Kurver, støder paa mere specielle Tilfælde.

Det Middel, hvorved jeg fra først af har sikret mig at faa alle de sædvanlige Kurver med dobbelte retliniede Grene og overhovedet Kurver med Mangefoldsgrene i Systemer af Kurver af tredie og fjerde Orden med, er forøvrigt disse særegne Kurvers Anvendelse til Bestemmelse af Karakteristikerne i de elementære Systemer, ja det er gjennem denne Anvendelse, at jeg først har erfaret Existensen af Kurverne af tredie og fjerde Art. (Smlgn. Bemærkningerne i Slutningen af 31 ([1])).

46. Kurver af fjerde Orden med to dobbelte retliniede Grene. — Paa en Kurve af fjerde Orden med en dobbelt retliniet Gren, er Restkurven et Keglesnit. Naar

[1] Se desuden *Comptes rendus* 23 Septbr. og 21 Oktbr. 1872.

dette reduceres til en Dobbeltlinie, faas en Kurve af fjerde Orden, som er sammensat af to Dobbeltlinier. Skal en saadan Kurve være en sædvanlig særegen Kurve i et System af Kurver uden særegne Punkter, maa der paa de to Dobbeltlinier ialt være 9 Toppunkter foruden dem, der falde sammen i Liniernes Skjæringspunkt. Denne Betingelse vil vise sig kun at være opfyldt (smlgn. 53) af de Kurver, som paa denne Maade dannes af Kurverne med dobbelt retliniet Gren af anden Art (eller for saa vidt ogsaa af saadanne, der dannes af Kurverne af første Art, som de Betingelser kunne være opfyldte, som ere nødvendige for, at den nye Gren skal være af anden Art). Naar vi i Ligning (II) sætte $n = 4$ og $A_2 = x^2$, idet Dobbeltlinien kan være Axen $x = 0$, faas

$$x^2 y^2 + 2 B_3 y k + C_4 k^2 + \psi k^3 = 0. \qquad \text{(XXII)}$$

I det herved fremstillede System giver $k = 0$ en Kurve, sammensat af to Dobbeltlinier, nemlig $y = 0$ med 6 enkelte Toppunkter bestemte ved $b_3{}^2 - x^2 c_4 = 0$, og $x = 0$ med 3 enkelte Toppunkter bestemte ved $B_3 = 0$. Den første er en dobbelt retliniet Gren af anden Art, hvorfra Grene af den ved lim. $k = 0$ bestemte Kurve have Afstande proportionale med k, medens $x = 0$ er en dobbelt retliniet Gren af første Art, hvorfra Nabokurvens Grene have Afstande proportionale med $k^{\frac{1}{2}}$.

Skjæringspunktet mellem Dobbeltlinierne bliver et tredobbelt Toppunkt. Til dettes Dannelse medvirker den ene af de derigjennem gaaende Grene ikke, nemlig en af dem, som falde henad $y = 0$, hvilken paa Nabokurven ogsaa i Nærheden af Begyndelsespunktet har en Afstand fra $y = 0$, som er proportional med k. Derimod ville to andre Grene danne et saadant tredobbelt Toppunkt som dem, der ere beskrevne i 41. Dette ses derved, at de Punkter af Nabokurven, for hvilke lim. $\frac{k}{y} = 0$, tilfredsstille Ligningen

$$x^2 y + 2 B_3 k = 0,$$

som giver en Kurve af første Art med $x = 0$ til Dobbeltlinie og $y = 0$ til enkelt Gren.

Af Vendetangenterne falde 8 sammen i Linien $x = 0$. Disses Røringspunkter bestemmes ved samme Ordinater y, som om Kurven havde været Tredjegradskurven $x^2 y + 2 B_3' = 0$, hvor B_3' betegner den Funktion af y, som dannes ved i B_3 at sætte $x = 0$. — De øvrige 16 Vendetangenter maa falde sammen i Linien $y = 0$.

Vi ville kalde Antallet af saadanne særegne Kurver i et System $\varkappa$ (1).

Paa Fig. 28 fremstiller 2 en Overgangskurve af den her beskrevne Art. 1 og 3 ere tegnede saaledes, at de med Hensyn til Dobbelttangenter og Vendetangenter netop bestaa af de samme Stykker som paa Fig. 24.

---

(1) Cayley har i *Compte rendu* for 11te Marts 1872 givet en analytisk Fremstilling af disse Kurver — som overhovedet af de Kurver af fjerde Orden med dobbelt retliniet Gren, som vi have kaldt Kurver af første og anden Art — og tildels angivet deres Form.

Ved i Stedet for Ligning (II) at gaa ud fra andre Fremstillinger af Kurverne af anden Art [(IX) eller (XIII)] vilde man faa andre Fremstillinger af de her beskrevne af to Dobbeltlinier sammensatte Kurver. Saaledes giver Ligning (IX) vel i Almindelighed, naar Restkurven bliver til $x^2 = 0$,

$$(x^2 + k A_2') y'^2 + 2 B_3' y' k^2 + C_4' k^4 = 0,$$

hvor Linien $x = 0$ kun indeholder to fra Begyndelsespunktet forskjellige Toppunkter bestemte ved $A_2 = 0$; men denne Ligning bliver, naar A_2' er delelig med x, til

$$(x^2 + 2 k A_1' x) y'^2 + 2 B_3' y' k^2 + C_4' k^4 = 0,$$

hvor Toppunkterne paa $x = 0$ bestemmes ved

$$A_1{}^2 y - 2 B_3 = 0.$$

Toppunkterne paa $y = 0$ bestemmes paa sædvanlig Maade ved $b_3{}^2 - x^2 c_4 = 0$.

47. Kurver af n'te Orden med en r-dobbelt retliniet Gren. — Af Kurver med en r-dobbelt retliniet Gren, der fremstilles ganske som Kurver med en dobbelt retliniet Gren, skulle vi kun betragte dem, der for $r = 2$ blive af anden Art, hvilke — som man let finder — for $r > 2$ ere de eneste, som ere sædvanlige særegne Kurver i Systemer af tredie og fjerde Orden. Saadanne Kurver faas for $k = 0$ i Systemet

$$A_{n-r} y^r + A_{n-r+1} y^{r-1} . k + \dots . + A_{n-1} y . k^{r-1} + A_n . k^r + \psi . k^{r+1} = 0. \quad \text{(XXIII)}$$

Første Led i Rækkeudviklingerne for de r Værdier af y, som svare til en vilkaarlig Værdi af x, og som forsvinde for $k = 0$, bestemmes ved Ligningen

$$a_{n-r} y^r + a_{n-r+1} y^{r-1} k + \dots . + a_{n-1} y k^{r-1} + a_n k^r = 0.$$

Denne Lignings Diskriminant, som er af Graden $(r-1)(2n-r)$, bestemmer $(r-1)(2n-r)$ enkelte Toppunkter. De $n-r$ Skjæringspunkter med Restkurven maa være dobbelte Toppunkter dannede af to Grene, medens $r-1$ Grene gaa derigjennem uden at danne Toppunkter (smlgn 42). Tangenterne fra et Punkt til Grænsekurven $k = 0$ dannes af Tangenter til Restkurven A_{n-r} og Linier til Toppunkterne i Antal

$$(n-r)(n-r-1) + (r-1)(2n-r) + 2 . (n-r) = n(n-1).$$

At Antallet af Betingelser, som man kan underkaste Restkurven og Mangefoldslinien, lagt til Antallet af enkelte Toppunkter, for $n > 3$, $r > 2$ overskrider Antallet af Betingelser, som bestemme et System, idet

$$\frac{(n-r)(n-r+3)}{2} + 2 + (r-1)(2n-r) = \frac{n(n+3)}{2} - 1 + (r-2)\frac{2n-r-3}{2},$$

beror paa, at man, naar $n > 3$, ikke vilkaarligt kan vælge de $n(n-1)$ Tangenter, som skulle udgaa fra et givet Punkt og røre en given Kurve[1] og derfor heller ikke vilkaarligt vælge alle de enkelte Toppunkter. Da man for $n = 3$ kan

[1] Dette har jeg vist i *Tidsskrift for Mathematik* 1872 S. 67.

vælge alle 6 Tangenter vilkaarligt og for $n = 4$ de 11, og da $n = 4$, $r = 3$ eller 4 netop giver $(r-2)\frac{2n - r - 3}{2} = 1$, viser det sig, at i alt Fald for de her angivne Tal Ligning (XXIII) vil give sædvanlige særegne Kurver. Vi kalde Antallet af Kurver med en tredobbelt retliniet Gren i Systemer af tredie og fjerde Orden λ, og Antallet af firdobbelte rette Linier i et System af fjerde Orden ν.

De i 40 omtalte n'dobbelte rette Linier ere saadanne, som for $n = r$ fremstilles ved Ligning (XXIII).

Naar man erindrer, at en Kurve af tredie Orden enten bestaar af en uendelig Gren med tre reelle Vendetangenter og en Oval (der selvfølgelig kan skjære den uendelig fjerne rette Linie), eller kun af den første af disse Bestanddele, faar man 16 forskjellige Former for Kurver af tredie Orden, der nærme sig til en tredobbelt ret Linie med 6 reelle Toppunkter. Hvis Ovalen nemlig er reel, kan den ligge paa hver af de 6 Strækninger, hvori Toppunkterne dele Linien; naar Ovalen er imaginær, kunne de Strækninger, hvor tre reelle Grene nærme sig til at falde sammen, fordeles paa 2 forskjellige Maader; endelig vil man efterat have dannet en Kurve af hver af disse Arter faa en ny ved at dreje Figuren om i den symmetriske Beliggenhed mod den tredobbelte rette Linie, hvortil Kurverne nærme sig. Disse 8 sidste Former ville, da Afstandene fra den tredobbelte Linie for lim. $k = 0$ blive proportionale med k, kun være dem, som de 8 første Kurver antage, naar k skifter Fortegn. Der faas saaledes 8 øjensynligt forskjellige Former for Gjennemgangen gjennem en tredobbelt ret Linie (se Slutning af 49).

48. Dobbelte Keglesnit. — I Kurver af tilstrækkelig høj Orden kan man ogsaa træffe paa krumme Mangefoldsgrene, hvis Undersøgelse ikke vil være væsentligt forskjellig fra Undersøgelsen af de retliniede Grene. Vi skulle her kun omtale dem, som man træffer i Systemer af Kurver af fjerde Orden, nemlig dobbelte Keglesnit.

Ligningen

$$A_2{}^2 + B_4 k + \psi_4 k^2 = 0 \tag{XXIV}$$

vil fremstille et System, hvori $k = 0$ giver en Kurve, hvis Punkter danne Keglesnittet $A_2 = 0$ to Gange. Den ved lim. $k = 0$ bestemte Kurves Afstand fra dette Keglesnit er af Ordenen $\frac{1}{2}$. Selve Grænsekurven faar de 8 Punkter, som bestemmes ved

$$A_2 = 0,\ B_4 = 0$$

til Toppunkter. — I Tangenterne til $A_2 = 0$ i hvert af disse Punkter falde tre Vendetangenter sammen (se 44 og 51). Dobbelttangenterne ere Toppunkternes 28 Forbindelseslinier.

Idet Toppunkterne, som Skjæringspunkter mellem en Kurve af fjerde Orden og et Keglesnit, alle kunne vælges vilkaarligt paa dette sidste, kan den fremstillede Grænsekurve tilfredsstille $5 + 8$ elementære Betingelser og hører saaledes med til de sædvanlige særegne Kurver i et System uden Dobbeltpunkter og Spidser. Antallet af disse Kurver kalde vi ϑ.

Naar $B_4 = 2 B_2 A_2$, faar man blot nye Fremstillinger af de samme Kurver. Afstandene fra Grænsekurven blive da proportionale med k.

Hvis alle Toppunkter ere reelle, ville Grænsekurvens nærliggende Kurver aabenbart bestaa af Ovaler med indadgaaende Buer som paa 25, 26 og 27.

49. Regler for Tællingen af Kurver med Mangefoldsgrene. — Ifølge 42 og 47 vil et System af Kurver af tredie Orden uden særegne Punkter indeholde:

ξ Kurver sammensatte af en enkelt ret Linie og en dobbelt retliniet Gren af anden Art med 4 enkelte Toppunkter;

λ tredobbelte rette Linier med 6 Toppunkter.

Et System af Kurver af fjerde Orden uden særegne Punkter vil indeholde:

ξ Kurver med dobbelt retliniet Gren af anden Art (se 42);

η Kurver med dobbelt retliniet Gren af tredie Art (se 44);

ζ Kurver med dobbelt retliniet Gren af fjerde Art (se 45);

$\varkappa$ Kurver med to dobbelte retliniede Grene (se 46);

λ Kurver med en tredobbelt retliniet Gren (se 47);

ν firdobbelte rette Linier (se 47);

ϑ dobbelte Keglesnit (se 48).

I disse Tal er en Grænsekurve indbefattet én Gang, naar den én Gang forekommer i Systemet og da fremstilles paa den simpleste Maade, saaledes at de Grene, der nærme sig til Mangefoldsgrenene, for lim. $k = 0$ virkelig faa de Afstande derfra som angivet i Beskrivelserne af de særegne Kurver. De Formler, som vi skulle angive, ville imidlertid ogsaa blive anvendelige, hvor der maa benyttes mere sammensatte Fremstillinger, idet vedkommende Kurve da blot tælles flere Gange med i Antallet af de særegne Kurver, hvortil den hører, rettende sig efter den højeste Potens, hvori k indgaar i de Led, som maatte benyttes ved Bestemmelsen af nærliggende Kurver, der tilfredsstille saadanne opgivne Betingelser, at deres Antal faa Betydning ved Dannelsen af vedkommende Formler. (Smlgn hvad der i 11 er sagt om Kurverne α). Saaledes maa den ved $k = 0$ bestemte Grænsekurve i det System, der fremstilles ved Ligning (XIII), hvor man benytter Led, der indeholde $k^{2(r+1)}$, medens man i Ligning (II) kun gaar til Led, der indeholde k^2, tælles $r + 1$ Gange med i Tallet ξ. For saa vidt en og samme særegne Kurve forekommer flere Gange i Systemet, maa man tage særligt Hensyn til hver enkelt Forekomst.

Man kommer herved til følgende Regel, ved hvilken man, naar de opgivne Betingelser bestaa i Røring med givne Kurver, undgaar i de enkelte Tilfælde at skulle undersøge, under hvilken Form Ligningerne for de særegne Kurver fremstille sig:

En særegen Kurve i et System, hvor en af de opgivne Betingelser bestaar i Røring med en given Kurve C, vil, naar en r-dobbelt Gren har denne Røring, tælles r Gange saa mange Gange med i Antallet af Systemets særegne Kurver af samme Art, som den vilde, hvis det var en enkelt Gren, der rørte C. Kurven C antages her ogsaa at kunne være en ret Linie eller et Punkt (hvorigjennem Kurverne skulle gaa), og de omtalte Grene af den særegne Kurve kunne ogsaa være rette Linier eller Toppunkter (der ligge paa C).

Naar nemlig allerede den simpleste Fremstilling for lim. $k = 0$ gjør de r sammenfaldende Grenes indbyrdes Afstande proportionale med k^s, hvor s er hel, er der en væsentlig Forskjel paa de r Grene, saaledes at den samme særegne Kurve bliver Grænsestilling for r forskjellige Rækker af Kurver i Systemet, i hvilke hver Gang en forskjellig Gren rører C. Naar derimod de r Grenes indbyrdes Afstande i Tilfælde af den simpleste Fremstilling, der er forenelig med Systemets øvrige Betingelser, vilde blive proportionale med $k^{\frac{s}{r}}$, vilde denne Fremstilling ikke mere kunne bruges, idet man da ved at udtrykke, at én af Grenene skulde røre C, maatte udtrykke, at de alle gjorde det. Ved at udtrykke, at én af Grenene rører C, gjøres der altsaa en saadan Forskjel paa denne Gren og de øvrige, som vel ikke her som før vil bevirke, at Kurven er Grænsekurve for r forskjellige Rækker i Systemet, men som bevirker, at den Ligning, der fremstiller Systemet, bliver en saadan, i hvilken man ved Undersøgelse af den særegne Kurves Nabokurver maa gjøre Brug af Led, der ere af en r Gange saa høj Grad med Hensyn til k som i den første Fremstilling. Reglen gjælder da ogsaa i dette Tilfælde. Blive de $\frac{r(r-1)}{2}$ indbyrdes Afstande ikke af samme Orden, maa man særskilt tage Hensyn til dem, der blive det.

Hvorledes denne Bevisførelse videre gjennemføres, have vi i nogle Tilfælde eftervist i 43 og for Kurver α's og α''s Vedkommende i første Afsnit i 12 og 14, og det er ikke vanskeligt at se, at den ogsaa maa gjælde almindeligt. Hermed er ikke sagt, at der ikke kan indtræde Tilfælde, hvor de anstillede Betragtninger og dermed den opstillede Regel maa modificeres; men i saa Fald maa man udtrykkelig kunne paavise Grunden dertil. For Systemer af Kurver af tredie og fjerde Orden, som røre givne Kurver, eller specielt for elementære Systemer, intræder der ikke saadanne Undtagelsestilfælde.

Ved Hjælp af den anførte Regel kan man nu i Systemer af Kurver af tredie og fjerde Orden, der røre givne Kurver, paa en konstant Faktor nær finde de samlede Antal særegne Kurver af en vis Art, som enten indbefatter alle Kurverne ξ eller η eller .... ϑ eller dog en større Gruppe af disse. (Dette sidste kan indtræffe for Kurverne λ og ν.) Den konstante Faktor angiver, hvor ofte Kurverne forekomme i Systemet, naar alle Røringer falde paa enkelte Grene. Det er ifølge Figurbeskrivelserne i 47 og 42 at vente, at denne Koefficient bliver delelig med 8 for Kurverne λ i Systemer af tredie Orden (den bliver 40), og at den bliver delelig med 2 for Kurverne ξ i Systemer af fjerde Orden. Denne Faktors Bestemmelse foretages ved Undersøgelse af elementære Systemer gjennem forskjellig Udledelse af samme Tal. Man faar ad denne Vej meget let Bekræftelse paa, hvad vi derfor i det følgende ikke skulle opholde os ved, at vedkommende Koefficient er 1 for Kurverne η, ζ, $\varkappa$ og ϑ (samt de i det følgende omtalte Kurver ψ og χ) og for

Kurverne ξ af tredie Orden, men for Kurverne ξ af fjerde Orden i Almindelighed 2 (¹). Større Vanskelighed indtræder med Hensyn til Kurverne λ og ν navnlig i Systemer af fjerde Orden, hvor den Omstændighed, at et af Toppunkterne ikke kan vælges vilkaarligt, giver Anledning til forskjellige Tilfælde. Vi have dog ad den anførte indirekte Vej kunnet løse alle de herhen hørende Opgaver (se 4de Afsnit); men de Midler, vi have benyttet dertil, vilde ikke strække til ved den forøgede Mangfoldighed af forskjellige Tilfælde, som indtræde, naar $n > 4$. De Resultater, vi have fundet, naar $n = 4$, kunne maaske have Betydning ved Undersøgelser over Afhængigheden mellem de 12 Tangenter fra et Punkt til en Kurve af fjerde Orden.

50. Formler for Systemer $n = 3$, $d = e = 0$. — Naar man vil anvende Formlerne i 24 paa Systemer, hvori der findes Kurver med Mangefoldsgrene, maa man som allerede angivet tilføje supplementære Led, der, naar man kjender disse særegne Kurver, findes ganske som Formlernes andre Led. For et System af Kurver af tredie Orden uden særegne Punkter finder man (²):

$$4\mu = \mu' + 2\xi + 6\lambda, \tag{3}$$
$$10\mu' = \mu + 3c' + \xi + \alpha, \tag{3'}$$
$$9\mu + 3c' = 3q' + 18\xi + 27\lambda, \tag{5'}$$
$$16c' = 2z' + 4\alpha + 72\xi + 72\lambda, \tag{8'}$$
$$\mu' + 5\mu = c' + \xi + 6\lambda, \tag{9}$$
$$4\mu + 5\mu' = 2q' + 8\xi + 12\lambda, \tag{9'}$$
$$4c' + 9\mu' = 2q' + 4\alpha + 36\xi + 36\lambda, \tag{11'}$$
$$12\mu + 6\mu' = 3\alpha + 24\xi + 36\lambda, \tag{12'}$$
$$12c' + 54\mu' = 6z' + 3\alpha + 108\xi + 108\lambda, \tag{14'}$$

hvor vi have givet alle Formler samme Nummer som de tilsvarende i 24. De øvrige Formler i 24 ere uanvendelige i dette Tilfælde. Formlerne kunne tjene til at udtrykke μ', α, c', q', z' ved μ, ξ og λ og give desuden 4 Prøveligninger. Specielt er

$$\alpha = 12\mu - 12\xi - 24\lambda,$$

en Formel, som ved Siden af (3) anvendes ved Bestemmelsen af Karakteristikerne.

51. Formler for Systemer $n = 4$, $d = e = 0$. — Man finder ligeledes for Systemer af fjerde Orden uden særegne Punkter, idet $u' = (3d') = (2d'e') = 0$:

(¹) I saadanne Systemer, hvor den i Figurbeskrivelsen i 42 omtalte Grund til, at denne Koefficient skal blive 2 — saasom i de elementære Systemer med 2 Dobbeltpunkter, se 55 og 64 — bliver den selvfølgelig kun 1.

(²) Størstedelen af disse Resultater findes i Maillard's i Indledningen omtalte Afhandling; nogle af dem ogsaa i mine Meddelelser i *Comptes rendus* i Febr. og Marts 1872.

$$6\mu = \mu' + 2\xi + 3\eta + 4\zeta + (2+1)\varkappa + 6\lambda + 12\nu + 2\vartheta \qquad (3)$$ [1]

$$22\mu' = \mu + 2b' + 3c' + \alpha + 2\xi + 2\eta + 6\zeta + 2\varkappa + \lambda + 2\vartheta \qquad (3')$$

$$2\mu' + 12\mu = c' + 2\xi + 2\eta + 2.2\zeta + 2\varkappa + (2+10)\lambda + 2.12\nu + 2\vartheta \qquad (9)$$

$$2\mu' + 20\mu = 2b' + 2.2\xi + 2.3\eta + 2.2\zeta + (2.3+6+2)\varkappa + 2.2\lambda + 2.12\nu + (8+2)\vartheta \qquad (12)$$

$$28\mu + 4b' = 2p' + 2.16\xi + 2.21\eta + 2.28\zeta + 2.10\varkappa + 3.28\lambda + 4.28\nu \qquad (4')$$

$$24\mu + 4c' = 3q' + v' + 2.18\xi + (2.21+2)\eta + 2.24\zeta + (2.16+8)\varkappa + 3.24\lambda + 4.24\nu \qquad (5')$$

$$54b' = 2x' + 6\alpha + 16.15\xi + 21.20\eta + 28.27\zeta + 10.9\varkappa + 28.27\lambda + 28.27\nu \qquad (6')$$

$$\left.\begin{aligned} 24b' + 28c' = y' + 3(d'2e') + 16.18\xi + 21\left(21 + \tfrac{1}{3}.3\right)\eta + 28.24\zeta + 10.16\varkappa \\ + 28.24\lambda + 28.24\nu \end{aligned}\right\} \quad (7')$$

$$\left.\begin{aligned} 46c' = 2z' + 3(d'2e') + 4\alpha + (18.17 + 2.2)\xi + \left[21\left(18 + \tfrac{4}{3}.2 + \tfrac{1}{3}.3\right) + 1(21+2)\right]\eta \\ + 24\left(21 + \tfrac{5}{3}.2\right)\zeta + (16.15 + 4.7)\varkappa + 24.23\lambda + 24.23.\nu + 8.2\vartheta \end{aligned}\right\} \quad (8')$$

$$\left.\begin{aligned} 10\mu + 12\mu' = p' + 2q' + 2.8\xi + \left(2.7 + 2.2.\tfrac{5}{4}\right)\eta + \left(2.8 + 2.2.\tfrac{3}{2} + 2\right)\zeta + (2.7+4)\varkappa \\ + 3.10\lambda + 4.10\nu + 2.2.\tfrac{1}{2}.\vartheta \end{aligned}\right\} \quad (9')$$

$$\left.\begin{aligned} 10b' + 28\mu' = p' + 2(d'2e') + 6\alpha + 16.8\xi + 21.9\eta + 28.10\zeta + 10.7\varkappa \\ + 28.10\lambda + 28.10\nu \end{aligned}\right\} \quad (10')$$

$$\left.\begin{aligned} 10c' + 24\mu' = 2q' + 4(d'2e') + 4\alpha + (18.8 + 2.2)\xi + \left[21\left(8 + \tfrac{5}{3}\right) + 1(7 + 2.2)\right]\eta \\ + 24\left(9 + \tfrac{7}{3}\right)\zeta + (16.7 + 4.4)\varkappa + 24.10\lambda + 24.10\nu + 8.2\vartheta \end{aligned}\right\} \quad (11')$$

$$\left.\begin{aligned} 90\mu + 36\mu' = 3v' + 4\alpha + (2.8.7 + 2.2)\xi + \left[2.7(6+2) + 2.2\left(7 + \tfrac{5}{4}\right) + 2.2\right]\eta \\ + \left[2.8(7+2) + 2.2\left(8 + \tfrac{3}{2}\right) + 2\right]\zeta + (2.7.6 + 4.3)\varkappa + 3.10.9\lambda + 4.10.9\nu + 2.\vartheta \end{aligned}\right\} \quad (12')$$

$$\left.\begin{aligned} 90b' + 504\mu' = 4x' + 3y' + 16\alpha + (16.8.7 + 12.2)\xi + \left[21.5.8 + 21.2.2\left(7 + \tfrac{3}{2}\right) + 7.2\right]\eta \\ + [28.6.9 + 28.2.2(8+2)]\zeta + (10.7.6 + 18.2)\varkappa + 28.10.9\lambda + 28.10.9\nu + 28.2\vartheta \end{aligned}\right\} \quad (13')$$

$$\left.\begin{aligned} 90c' + 432\mu' = v' + 2y' + 6z' + 18\alpha + (18.8.7 + 2.3)\xi + \Big[21.6.8 + 21.2\left(7 + \tfrac{3}{2}\right) \\ + 21.8 + 7.8 + 2(7+2)\Big]\eta + [24.7.9 + 24.2(8+2) + 24.9]\zeta \\ + (16.7.6 + 8.2.3)\varkappa + 24.10.9.\lambda + 24.10.9.\nu + 24\vartheta \end{aligned}\right\} \quad (14')$$

$$2p' = 2b' + (d'2e') \qquad (15')$$

$$\left.\begin{aligned} 6\mu + 2\mu' = q' + 2.2\xi + (2.2+1)\eta + (2.2+2+2)\zeta + (2.2+2)\varkappa + (3.3+1)\lambda + 4.4\nu \\ + 2\vartheta \end{aligned}\right\} \quad (16')$$

Koefficienterne i de fire første af disse Formler findes ved Anvendelse af, hvad der allerede er sagt om de forskjellige særegne Kurver. Af disse Formler kunne (3), (9) og (12) tjene til at udtrykke μ', b' og c' ved μ og Antallene af særegne Kurver, hvorefter (3') giver

$$\alpha = 27\mu - 20\xi - 32\eta - 46\zeta - 24\varkappa - 45\lambda - 72\nu - 14\vartheta,$$

der ved Siden af Formel (3) anvendes ved Bestemmelsen af Karakteristikerne i de elementære Systemer.

---

[1] Naar jeg i *Compte rendu* for 23de Septbr. angiver, at Koefficienten til den Størrelse, som jeg der kalder ν, er 4, beror det paa, at ν ikke betegner det samme som ξ her, men som $\frac{\xi}{2}$, paa Grund af den Faktor 2, som ifølge 49 indgaar i selve Tallet ξ.

I de øvrige ovenfor anførte Ligninger ere Koefficienterne fundne dels ved direkte Undersøgelser dels ved de Prøver, som opnaas derved, at sex af Ligningerne kunne udledes af de andre — nemlig tre paa Grund af de i 32 omtalte Afhængigheder og tre paa Grund af, at Udtrykkene for u', $(3d')$ og $(2d'e')$ skulle forsvinde identisk (smlgn Formlerne i 34). Skjøndt vi ved den Maade, hvorpaa Koefficienterne ere skrevne, have søgt at udtrykke deres Betydning og de Forhold, som de udtrykke, skulle vi ogsaa i Ord fremsætte nogle af disse Forhold, der altsaa ere beviste gjennem en Forening af de anførte to Veje:

Naar et Punkt P er beliggende paa en Gren af en Kurve i Systemet, som, idet lim. $k = 0$, falder sammen med den dobbelte Gren af en Kurve η, ζ eller ϑ — der antages fremstillede paa den simpleste Maade — ville, de to Tangenter, hvis Røringspunkter med den anden Gren nærme sig til P, danne Vinkler med Tangenten i P, som ere proportionale henholdsvis med $k^{\frac{5}{4}}$, $k^{\frac{3}{2}}$, $k^{\frac{1}{4}}$; de Vendetangenter, hvis Røringspunkter falde sammen i et af disse Kurvers enkelte Toppunkter, danne Vinkler med hinanden proportionale med $k^{\frac{4}{3}}$, $k^{\frac{5}{3}}$, $k^{\frac{1}{3}}$; den Tangent fra et Punkt af en af disse Vendetangenter, hvis Røringspunkt falder sammen med Vendetangentens, danner en Vinkel med Vendetangenten proportional med $k^{\frac{5}{3}}$, $k^{\frac{7}{3}}$, $k^{\frac{2}{3}}$. — De tre Vendetangenter til en Kurve, som nærmer sig til en Kurve η, hvis Røringspunkter falde sammen i dennes tredobbelte Toppunkt, ville indbyrdes danne Vinkler proportionale med $k^{\frac{1}{3}}$, og enhver af dem vil med de to Tangenter fra et af dens Punkter, hvis Røringspunkter ogsaa have det tredobbelte Toppunkt til Grænsestilling, danne Vinkler proportionale med $k^{\frac{2}{3}}$.

De fundne Ligninger kunne tjene til Bestemmelse af p', q', x', y', z', v', $(d'\,2e')$.

52. Ny Art Kurver med en dobbelt retliniet Gren i Systemerne $n = 4$, $d = 1$, $e = 0$. — De Kurver med Mangefoldsgrene, som man træffer i et System af Kurver af fjerde Orden med ét Dobbeltpunkt, ere dels specielle Tilfælde af dem, man træffer i et System uden særegne Punkter, dels nogle mere modificerede Former, som skulle beskrives her i 52 og 53.

De to dobbelte Toppunkter paa anden Art Kurver af fjerde Orden med en dobbelt retliniet Gren (se 42 med Fig. 24 og 25) kunne falde sammen og danne et Dobbeltpunkt og et dobbelt Toppunkt. Man faar da en Kurve sammensat af et Keglesnit og en Dobbeltlinie, der rører dette, og som foruden et Dobbeltpunkt har et dobbelt Toppunkt i Røringspunktet, samt 6 enkelte Toppunkter.

En saadan Kurve vil ikke kunne fremstilles ved Ligning (II). Dette viser sig derved, at naar de dobbelte Toppunkter paa de ved denne Ligning fremstillede Kurver skulle falde sammen og danne et Dobbeltpunkt, ville af sig selv nogle af de enkelte Toppunkter falde i samme Punkt. Vi kunne da prøve at anvende Ligning (IX) i 43, som, idet A'_{n-2}, B'_{n-1}, C'_n indeholde k, for $n = 4$ kan omskrives til Formen

$$A'_2 y'^2 + B'_2 y'^2 k + C'_3 y' k^2 + D'_3 y' k^3 + E'_4 k^4 + \psi k^5 = 0,$$

hvor A', B', C', D' og E' betegne Funktioner alene af x og y' ($= y + b_1 k$). Man kan nu foreløbig søge de Betingelser, som disse Funktioner maa tilfredsstille, naar Systemets Kurver skulle have et (fra de enkelte Toppunkter adskilt) Dobbeltpunkt, der ligger fast i Begyndelsespunktet. Man finder da først, at a_2 maa være delelig med x^2, og dernæst en Række andre Betingelser, som ikke medføre, at x bliver Faktor i c_3 og derved $x = 0$ Rod i Ligningen $c_3{}^2 - a_2 e_4 = 0$, der bestemmer de enkelte Toppunkter. Denne Fremstillingsform kan altsaa endog anvendes, naar Dobbeltpunktet ligger fast, og da end mere, naar Systemet ikke er underkastet denne yderligere Betingelse. Derimod maa man ty til en mere sammensat Fremstillingsform, (indbefattet i (XIII)), naar Systemets Kurver skulle røre en Kurve, der gaar gjennem det dobbelte Toppunkt paa den fremstillede Grænsekurve, idet for den anførte simpleste Fremstillingsform de Grene, der danne dette, faa Afstande, som for lim. $k = 0$ ere proportionale med $k^{\frac{1}{2}}$. Tangenterne i Dobbeltpunktet danne ligeledes Vinkler proportionale med $k^{\frac{1}{2}}$, medens Afstanden mellem de Grene, der falde sammen i Dobbeltlinien, bliver proportional med k^2.

Antallet af disse Grænsekurver beregnet i Overensstemmelse med 49 ville vi betegne med ψ.

Paa Fig. 29 er 2 en Overgangskurve ψ mellem 1 og 3. For Tydeligheds Skyld have vi ladet Dobbeltpunktet, der har imaginære Grene paa 1, reelle paa 3, ligge fast. Det dobbelte Toppunkt er reelt paa 1, imaginært paa 3.

Vi kunne ved samme Lejlighed vise en yderligere Modifikation af de her fremstillede særegne Kurver, som foruden Kurver med tredobbelt og firdobbelt retliniet Gren og Kurver α vil være den eneste Art Kurver med Mangefoldsgrene, som man sædvanligvis finder i Systemerne $n = 4$, $d = 0$, $e = 1$. Det ses nemlig, at Dobbeltpunktet (med reelle Grene) paa Kurven 3 gaar over til en Spids, naar Sløifen svinder ind til et Punkt, i hvilket Tilfælde Keglesnittet paa Kurven 2 maa være sammensat af to imaginære rette Linier. Er derimod Keglesnittet i 2 sammensat af to reelle rette Linier, smelter det isolerede Punkt paa 1 sammen med et nyt Toppunkt og danner en Spids. Vi træffe saaledes i Systemer af fjerde Orden med en Spids saadanne Kurver, som ere sammensatte af to enkelte rette Linier og en Dobbeltlinie gjennem deres Skjæringspunkt, og som foruden en Spids have et tredobbelt Toppunkt i dette Skjæringspunkt, samt 6 enkelte Toppunkter. Disse særegne Kurver maa fremstilles ved en Ligning indbefattet i (XIII) for $r = 2$, saa de Grene, der nærme sig til Dobbeltlinien faa en indbyrdes Afstand, som for lim. $k = 0$ bliver proportional med k^3. Tangenter fra et vilkaarligt Punkt, der nærme sig til at gaa gjennem det tredobbelte Toppunkt, danne Vinkler proportionale med k.

Paa Fig. 30 ere Kurverne 1 og 3 Modifikationer af 3 paa Fig. 29. Paa Fig. 31 ere de Modifikationer af 1 paa Fig. 29 [1].

---

(1) Ovalerne paa Kurverne i Fig. 29 burde være beliggende ovenfor de to reelle Vendetangenter til de flade Grene, der udgaa fra den midterste Del af Kurven. Den samme Fejl have Fig. 30 og 31; men den er uvæsentlig med Hensyn til de Forhold, som her skulle oplyses.

53. Ny Art Kurver med to dobbelte retliniede Grene i Systemerne $n = 4$, $d = 1$, $e = 0$. — I Systemer af Kurver med to dobbelte retliniede Grene træffer man «sædvanligvis» ogsaa paa Kurver sammensatte af to Dobbeltlinier med et Dobbeltpunkt og et dobbelt Toppunkt i Dobbeltliniernes Skjæringspunkt, samt fire enkelte Toppunkter paa hver af disse to Linier. Dobbeltgrenene ere begge af anden Art.

Disse Kurver fremstilles ved en Ligning af Formen

$$x^2 y^2 + 2 A_2 xyk + B_4 k^2 + \psi k^3 = 0. \tag{XXV}$$

Denne Ligning vil i Almindelighed for $k = 0$ give en Kurve sammensat af Dobbeltlinierne $x = 0$, $y = 0$ med et firdobbelt Toppunkt i Punktet $x = 0$, $y = 0$ og med enkelte Toppunkter i de 8 Punkter, hvori Kurven

$$A_2{}^2 - B_4 = 0$$

skjærer de to Dobbeltlinier. Naar disse Kurver ikke ere omtalte i 46, er det, fordi de ikke høre til de sædvanlige særegne Kurver i et System uden særegne Punkter. Naar derimod B_4 og ψ ikke indeholde Led af under anden Grad med Hensyn til x og y, faa Kurverne i Systemet et fast Dobbeltpunkt i Begyndelsespunktet, og dette vil ombyttes med et bevægeligt Dobbeltpunkt, naar x og y ombyttes med $x + f_1 k + \ldots$, $y + g_1 k + \ldots$, hvorved Formen (XXV) for Ligningen ikke forandres. B_4 vil heller ikke efter denne Indsættelse indeholde noget konstant Led. I et saadant System vil den ved $k = 0$ bestemte Kurve, der kan underkastes 12 elementære Betingelser, være sædvanlig. Da de Grene, der danne det dobbelte Toppunkt, i Nærheden af dette bestemmes ved $xy + 2ak = 0$, hvor a er det konstante Led i A_2, har dette Toppunkt samme Egenskaber som paa Kurverne α_2. — Antallet af de her omtalte særegne Kurver ville vi kalde χ.

At paa Fig. 32 to af Kurven 2's Skjæringspunkter med 1 og 3 falde sammen med Toppunkter, er uvæsentligt.

54. Formler for Systemerne $n = 4$, $d = 1$, $e = 0$. — Sædvanlige særegne Kurver med Mangefoldsgrene i disse Systemer ere nu foruden de i 52 og 53 omtalte Kurver ψ og χ:

Kurver ξ [1], hvis Keglesnit har et Dobbeltpunkt og altsaa er sammensat af to rette Linier;

Kurver λ og ν, hvor to af de enkelte Toppunkter falde sammen og danne et Dobbeltpunkt — hvis Beliggenhed kan bestemmes ved den Afhængighed, der finder Sted mellem de 10 eller 12 enkelte Toppunkters Beliggenhed.

Vi skulle imidlertid ogsaa undersøge Systemer, der tillige indeholde usædvanlige særegne Kurver nemlig saadanne Systemer, der foruden elementære Betingelser ere under-

---

[1] Se 49, hvor der findes en samlet Angivelse af Betegnelsernes Betydning.

kastede den, at Dobbeltpunktet skal falde i et givet Punkt eller paa en given Linie. Disse Systemer ville ogsaa indeholde:

Kurver ξ, η, ζ, $\varkappa$ og ϑ, hvor to enkelte Toppunkter falde sammen og danne Dobbeltpunktet.

I disse Systemer faas saaledes to Slags Kurver ξ nemlig de sædvanlige, hvor Dobbeltpunktet findes paa Keglesnittet, og de usædvanlige, hvor det findes paa Dobbeltlinien. Vi kalde de førstes Antal ξ_1, de sidstes ξ_2, saa $\xi = \xi_1 + \xi_2$. — Ligeledes faas to Slags Kurver $\varkappa$, nemlig $\varkappa_1$, hvor Dobbeltpunktet dannes af to Toppunkter paa den Dobbeltlinie, som indeholder 3 enkelte Toppunkter, og $\varkappa_2$, hvor det dannes af to Toppunkter blandt de 6, som findes paa den anden Dobbeltlinie ($\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2$).

Ved i Formlerne i 24 ogsaa at tage Hensyn til de her omtalte særegne Kurver finder man blandt andet følgende Formler, hvor de Led, som skyldes usædvanlige særegne Kurver, ere satte mellem Klammer:

$$\mu' = 6\mu - 2b - 2\xi_1 - 6\lambda - 12\nu - 4\psi - 4\chi - [2\xi_2 + 3\eta + 4\zeta + 3\varkappa + 2\vartheta],$$
$$\alpha = 20\mu - 10b - 20\xi_1 - 30\lambda - 50\nu - 30\psi - 22\chi - [12\xi_2 + 20\eta + 30\zeta + 20\varkappa_1 + 16\varkappa_2 + 10\vartheta],$$
$$\beta = 2\mu + 2b - 4\lambda - 6\nu - 3\psi - 2\chi - [2\xi_2 + 3\eta + 4\zeta + \varkappa_1 + 2\varkappa_2 + \vartheta].$$

55. Formler for Systemerne $n = 4$, $d = 2$, $e = 0$. — Disse Systemer indeholde sædvanligvis ikke andre Kurver med Mangefoldsgrene end Kurver [α og] ξ, hvor to enkelte Toppunkter ere faldne sammen med et af de dobbelte Toppunkter og have dannet to Dobbeltpunkter. I disse skjærer Restkurven altsaa begge Dobbeltliniens Grene. Da vi imidlertid ogsaa her skulle undersøge Systemer, hvor et af Dobbeltpunkterne falder i et givet Punkt eller paa en given ret Linie, maa vi ogsaa tage Hensyn til de usædvanlige særegne Kurver, som man træffer paa i disse Systemer. Disse ere de selvsamme som de, man sædvanligvis træffer i et System med ét Dobbeltpunkt, nemlig ξ_1, λ, ν, ψ, χ, idet to Toppunkter falde sammen og danne det Dobbeltpunkt, hvis Beliggenhed helt eller tildels er given. Idet vi saaledes ogsaa her træffe to Slags Kurver ξ, nemlig Kurverne ξ_1 og dem, man sædvanligvis finder, kalde vi de «sædvanliges» Antal ξ_0. ($\xi = \xi_0 + \xi_1$).

Man finder nu ved at tilføje supplementære Led i Ligningerne i 24 — eller ved i Stedet for disse at benytte Ligning (24) i 33 til Bestemmelse af α_1 —

$$\mu' = 6\mu - 2b - 2\xi_0 - [2\xi_1 + 6\lambda + 12\nu + 4\psi + 4\chi],$$
$$\alpha_0 = 12\mu - 12x - 12\xi_0 - [12\xi_1 + 12\lambda + 24\nu + 12\psi + 12\chi],$$
$$\alpha_1 = \mu - 2b + 4x - [3\lambda + 4\nu + 2\psi + 2\chi],$$
$$(2d) = 2b - 2x - 2\xi_0.$$

Ved desuden at søge de x forskjellige Linier, som gaa gjennem et givet Punkt P, hvorigjennem Systemets Kurver skulle gaa, og som forbinde Dobbeltpunkterne paa en Kurve i Systemet, finder man, idet Koefficienterne blive de samme som i Ligning (24) (se Slutning af 33):

$$2[b] = x - [\alpha_1] - [3[\lambda] + 4[\nu] + 2[\psi] + 2[\chi]],$$

idet $[b]$ er Antallet af de Kurver i Systemet, som have et Dobbeltpunkt i P, $[\alpha_1]$, $[\nu]$ o.s.v. Antallene af de Kurver α_1, ν.., hvoraf en retliniet Gren (enkelt eller Mangefolds-) gaar gjennem P. $[\lambda]$ er her og i det følgende Antallet af de Kurver λ, hvis tredobbelte Gren gaar gjennem P.

Ved Hjælp af denne sidste Formel samt det Udtryk for b, som faas af de ovenfor anførte, finder man Antallene af de Kurver, som have begge deres Dobbeltpunkter fuldstændigt eller delvist bestemte samt tilfredsstille elementære Betingelser, uden at man særligt behøver at undersøge Systemer af saadanne Kurver. Saadanne Systemer vilde forøvrigt foruden de her nævnte særegne Kurver endnu indeholde Kurver η, ζ, $\varkappa$ og ϑ, samt endnu en Slags Kurver ξ.

56. Systemer af Kurver af 4de Orden, hvor der er Røring mellem to Grene. — Disse Systemer henhøre for saa vidt under de foregaaende, som de dannes deraf ved blot at lade en af de opgivne Betingelser være den, at to Dobbeltpunkter skulle falde sammen. Denne Betingelse vil imidlertid give Anledning til andre særegne Kurver end dem, hvortil der er taget Hensyn i 55. De særegne Kurver blive foruden Kurverne α_0, Kurverne α_1, hvis retliniede Gren maa røre Restkurven, og Kurverne β, der falde sammen to og to i Kurver med et Tilbagegangspunkt af anden Art:

τ Kurver, hvori Røringspunktet mellem to Grene er omdannet til et tredobbelt Punkt, som tillige er et dobbelt Toppunkt;

ξ Kurver med en dobbelt retliniet Gren af anden Art, i hvis ene Skjæringspunkt med Restkurven 3 af de 6 enkelte Toppunkter ere faldne sammen med det dobbelte Toppunkt og danne Systemets særegne Punkt samt et enkelt Toppunkt;

Kurver λ og ν, hvis særegne Punkt er dannet ved Sammenfalden af 4 enkelte Toppunkter.

I disse Systemer er endvidere $b = 2b_1$, hvor b_1 er Ordenen af det geometriske Sted for det særegne Punkt, og $p = 4x$, idet x er Klassen af Indhyllingskurven for den særegne Tangent. Man finder da ved Tilføjelse af supplementære Led i (3) og (10) i 24 samt (24) i 33.

$$\mu' = 6\mu - 4b_1 - 2\xi - 6\lambda - 12\nu,$$
$$3\tau = \mu + 2b_1 - 2x - 2\xi - \lambda - 2\nu,$$
$$\alpha_1 = \mu - 4b_1 + 4x - 3\lambda - 4\nu,$$
$$4[b_1] = x - [\alpha_1] - 3[\lambda] - 4[\nu].$$

Flere af de andre Formler navnlig de, hvori $(2d)$ forekommer, blive ubrugelige.

57. Systemer af Kurver af 4de Orden med et 3dobbelt Punkt. — Disse Systemer henhøre specielt under dem med tre Dobbeltpunkter (se 39), idet blot en af de opgivne Betingelser gaar ud paa, at disse skulle danne et tredobbelt Punkt. I et saadant System er $\alpha_0 = 0$, og det indeholder foruden de sædvanlige Kurver α_1 og β:

ξ Kurver med en dobbelt retliniet Gren af anden Art, hvor 4 af de 6 enkelte Toppunkter falde sammen med et af de to dobbelte Toppunkter for at danne det tredobbelte Punkt.

Desuden er $b = 3b_1$, $u = 2x$, hvor b_1 er Ordenen af det geometriske Sted for det særegne Punkt, x Klassen af Indhyllingskurven for Tangenterne i samme. Dernæst maa man sætte $p = 2x + \beta$, hvor Leddet β hidrører fra at, idet et af de tre sammenfaldende Dobbeltpunkter bliver en Spids, den for de to andre Dobbeltpunkter fælles Tangent bliver ubestemt. Endelig bliver $(2d) = \beta$.

Man finder da ved at tilføje de supplementære Led, som hidrøre fra Kurverne ξ, i Formlerne (3), (13) og (4) i 24 samt (24) i 33:

$$\mu' = 6\mu - 6b_1 - 2\xi,$$
$$x = \mu + b_1,$$
$$\beta = \mu' + 6b_1 - 2x = 4\mu - 2b_1 - 2\xi,$$
$$\alpha_1 = 4x + 3\mu - 12b_1 - 4\xi = 7\mu - 8b_1 - 4\xi,$$
$$12[b_1] = x - [\alpha_1] - 4[\xi].$$

De Formler, hvori $(3d)$ forekommer, blive derimod ubrugelige.

Vi have her i 56 og 57 udtrykkelig villet paavise, hvorledes de Formler, vi finde, paa de supplementære Led nær ere indbefattede i de almindelige Formler for Kurver med 2 eller 3 Dobbeltpunkter. Men lettere er det direkte at udlede de Formler, som skulle anvendes i disse specielle Tilfælde, idet man blot dertil anvender de samme Fremgangsmaader, som i andet Afsnit benyttedes til at finde de almindeligere Formler. Ovenstaaende Udtryk for x findes da ved samme Fremgangsmaade som Formel (10) og Udtrykket for β ved samme Fremgangsmaade som (4).

Paa lignende Maade kan man finde de Formler, som maa benyttes ved Undersøgelser af andre Systemer med sammensatte særegne Punkter.

58. Exempel paa reciproke Kurver til ξ og λ. — Hvis man i de Ligninger, der fremstille Kurverne ξ, η o. s. v., ombytter Punktkoordinater med Liniekoordinater, faar man Fremstillinger af særegne Kurver, hvor den dobbelte eller flerdobbelte rette Linie er ombyttet med et dobbelt eller flerdobbelt Toppunkt, og de enkelte eller (fler-) dobbelte Toppunkter med retliniede Grene. Ved denne Ombytning faar man af de sædvanlige Kurver med Mangefoldsgrene i et System af fjerde Orden de sædvanlige Kurver med Mangefoldsgrene i et System af fjerde Klasse o. s. v.

For at faa et Exempel paa nogle af disse Kurver kunne vi betragte visse Systemer, hvor $n=3$, $d=0$, $e=1$. I disse have vi i 35 sagt, at der sædvanligvis ikke forekommer Kurver med Mangefoldsgrene. Saadanne træffer man derimod, naar Spidsen enten skal ligge i et givet Punkt eller dog paa en given Linie, nemlig Kurver ξ og λ, i hvilke Spidsen, der falder paa den dobbelte eller tredobbelte Gren, dannes ved, at tre enkelte Toppunkter falde sammen. Ligeledes vil der ifølge Dualitetsprincipet, naar Vendetangenten enten skal være en given ret Linie eller dog røre en given Kurve (gaa gjennem et givet Punkt), findes:

ξ' Kurver med et dobbelt Toppunkt, hvori tillige Spidsen falder, og hvorigjennem Vendetangenten gaar, og et enkelt Toppunkt, og som betragtede som Punktfrembringelser ere sammensatte af en Dobbeltlinie gjennem de to Toppunkter og en enkelt ret Linie gjennem det dobbelte Toppunkt;

λ' Kurver med et tredobbelt Toppunkt, hvori Spidsen falder, og hvorigjennem Vendetangenten gaar, og som betragtede som Punktfrembringelser ere sammensatte af tre rette Linier gjennem dette Punkt.

Afstanden mellem de Grene af en Nabokurve til en Kurve ξ', som nærme sig til det dobbelte Toppunkt, er — naar den simpleste Fremstilling anvendes — af første Orden, medens Afstanden mellem de Grene, der nærme sig til Dobbeltlinien, er af Ordenen $\frac{1}{2}$. Naar en Kurve ξ' fremstilles ved Punktkoordinater, maa den saaledes henregnes til den i 41 omtalte første Art af Kurver med en dobbelt retliniet Gren. De Grene af en Nabokurve til en Kurve λ', som nærme sig til det tredobbelte Toppunkt, have Afstande af første Orden.

Naar man nu ogsaa vil tage Hensyn til Systemer, der indeholde disse særegne Kurver ξ, λ, ξ', λ', maa Formlerne i 35 ombyttes med følgende:

$$2\gamma_1 = \mu + \mu' - 2\xi - 3\lambda - 2\xi' - 3\lambda',$$

$$3c = 4\mu - \mu' - 2\xi - 6\lambda - \xi', \qquad 3c' = 4\mu' - \mu - 2\xi' - 6\lambda' - \xi,$$

$$6q = 7\mu - \mu' - 2\xi - 9\lambda - 4\xi' - 3\lambda', \quad 6q' = 7\mu' - \mu - 2\xi' - 9\lambda' - 4\xi - 3\lambda,$$

$$3[c] = q - [\gamma_1] - 2[\xi] - 3[\lambda], \qquad 3[c']' = q' - [\gamma_1]' - 2[\xi']' - 3[\lambda']',$$

hvor $[\xi']'$ og $[\lambda']'$ ere de Kurver ξ' og λ', der have det dobbelte eller tredobbelte Toppunkt paa en given ret Linie, som Systemets Kurver skulle røre.

Fjerde Afsnit.

Bestemmelse af Karakteristikerne i elementære Systemer af fjerde Orden.

---

59. Systemer $n=3$, $d=0$, $e=1$. — Karakteristikerne i elementære Systemer af tredie Orden bestemmes ved Formlerne i 35, 36 og 50. Da Systemer, hvor de opgivne Betingelser bestaa i Røring i et givet Punkt med en given Linie samt opgivne Punkter af Kurven og Tangenter til Kurven, kun have sædvanlige Særegenheder, kunne ogsaa saadanne Systemers Karakteristiker let findes. Da de anførte Bestemmelser ere foretagne dels i Maillard's dels i mine i Indledningen omtalte Afhandlinger, skal jeg her nøjes med for det følgendes Skyld at angive Resultaterne. Ved $s P t L$ betegner jeg et System af Kurver, som gaa gjennem s givne Punkter, og som røre t givne rette Linier, ved $[P]$ Antallet af de Kurver i et System, der have en given Tangent i et af Systemets givne Punkter, og ved $[L]$ Antallet af dem, der røre en af Systemets givne Tangenter i et givet Punkt. Man finder da for $n=3$, $d=0$, $e=1$ (ifølge 35)

System.	μ	μ'	c	c'	q	q'	$[c]$	$[c']'$	$[L]$	
$6P$	24	60	12	72	18	66	2			$(6L)$
$5PL$	60	114	42	132	51	123	8	32	18	$(P\ 5L)$
$4P\ 2L$	114	168	96	186	105	177	20	44	36	$(2P\ 4L)$
$3P\ 3L$	168	168	168	168	168	168	38	38	54	$(3P\ 3L)$
	μ'	μ	c'	c	q'	q	$[c']'$	$[c]$	$[P]$	System.

60. Systemer $n=3$, $d=1$, $e=0$. — Man finder ved 36

System.	μ	μ'	b	p	$c'=z'$	q'	$[b]$	$[c']'$	$[L]$
$7P$	12	36	6	18	54	66	1		
$6PL$	36	100	22	58	150	186	4	21	10
$5P\ 2L$	100	240	80	180	360	460	16	54	28
$4P\ 3L$	240	480	240	480	720	960	52	108	68
$3P\ 4L$	480	712	604	1084	1068	1548	142	156	136
$2P\ 5L$	712	756	1046	1758	1134	1846	256	162	196
$P\ 6L$	756	600	1212	1968	900	1656	304	126	200
$7L$	600	400	1000	1600	600	1200		84	148

61. Systemer $n = 3$, $d = e = 0$. — Man finder ved 50

System.	μ	μ'	c'	q'	z'	$[L]$
$(8-t)\,P\,t\,L;\ t < 4$	4^t	4^{t+1}	$9 \,.\, 4^t$	$3 \,.\, 4^{t+1}$	$3 \,.\, 4^{t+2}$	4^{t-1}
$4\,P\,4\,L$	256	976	2232	2856	11424	64
$3\,P\,5\,L$	976	3424	8064	9552	38208	244
$2\,P\,6\,L$	3424	9766	23841	25563	102252	856
$P\,7\,L$	9766	21004	53244	51042	204168	2344
$8\,L$	21004	33616	88236	75648	302592	4726

62. Systemer af Kurver af 4de Orden med et 3dobbelt Punkt. — Vi ville først behandle Systemer, ved hvis Undersøgelse vi føres hen mod Løsningen af den Hovedopgave: at finde Karakteristikerne i de elementære Systemer af Kurver af fjerde Orden uden særegne Punkter. Naar denne Opgave, der volder størst Vanskelighed, først er løst, vil man derved være kommen i Besiddelse af saa mange Midler til Bestemmelsen af de andre Karakteristiker i Systemer af fjerde Orden, at de vel kunne volde Arbejde, men ikke alvorlige Vanskeligheder.

Vi begynde med at bestemme Karakteristikerne i Systemer af Kurver med et tredobbelt Punkt, hvortil vi benytte Formlerne i 57. I Systemet $9\,P$ finder man ved Hjælp af de i 60 angivne Resultater [b og μ i System $7\,P$]

$$\alpha_1 = \frac{9 \,.\, 8}{2} \,.\, 6 + 9 \,.\, 12 = 324, \qquad [\alpha_1] = 8 \,.\, 6 + 12 = 60.$$

Desuden er aabenbart $\xi = [\xi] = 0$, og da en Kurve er fuldkommen bestemt, naar dens tredobbelte Punkt og 8 andre af dens Punkter ere givne, er $[b_1] = 1$. Formlerne give dernæst

$$x = 72, \ \mu = 60, \ b_1 = 12, \ \mu' = 288, \ \beta = 216.$$

Naar man derpaa efterhaanden undersøger Systemerne $(8\,PL)$, $(7\,P\,2\,L)$ . . ., kjender man forud μ; man kan bestemme α_1, $[\alpha_1]$, ξ og $[\xi_1]$ og derpaa finde μ', b_1, x, $[b_1]$ og β. Ved Bestemmelsen af α_1 benytter man sig af, at i et System af tredie Orden med Dobbeltpunkt Antallet af de Kurver, der have dette særegne Punkt beliggende paa en given ret Linie gjennem et af Systemets givne Punkter P, men ikke i selve Punket P, er $b - 2\,[b]$, samt af den tredie Sætning i 29. Man finder da f. Ex. i Systemet $3\,P\;6\,L$ [1]:

---

(1) Vi ordne her og i det følgende Leddene efter Antallene af givne Tangenter, som gaa igjennem de særegne Kurvers Toppunkter, saaledes at de Faktorer, som staa udenfor { }, svare til de enkelte Toppunkter, som ligge paa en Mangefoldsgren, og de Faktorer, som staa udenfor [ ] svare til Toppunkter, som ligge i nye særegne Punkter eller i Skjæringspunkter mellem Grænsekurvernes forskjellige Dele. For større Tydeligheds Skyld have vi enkelte Steder — her i ξ — betegnet Antal af givne Tangenter eller af givne Punkter ved at sætte en Prik eller en Akcent ved vedkommende

$$\alpha_1 = \frac{3.2}{2}.1212 + 3.756 + 2.6\left[\frac{3.2}{2}(1046 - 2.256) + 3(1046 + 712) + 712.3\right]$$
$$+ 4.\frac{6.5}{2}[3(604 - 2.142) + 480] = \mathbf{200448},$$

$$[\alpha_1] = 2.1212 + 756 + 2.6[2.534 + 1758] + 4.\frac{6.5}{2}320 = \mathbf{56292},$$

$$\xi = \frac{6'.5'}{2}\left\{4.\frac{3^{\cdot}.2^{\cdot}}{2}.2.2 + 2.4'[4.\frac{3^{\cdot}.2^{\cdot}}{2}.4 + 2.3^{\cdot}.4.2] + 4.\frac{4'.3'}{2}.2.3^{\cdot}.4\right\}$$
$$+ \frac{6'.5'}{2}.4'\left\{2.3^{\cdot}.4.2 + 2.3'[2.3^{\cdot}.4 + 4.2] + 4.\frac{3'.2'}{2}.2\right\}$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{6'.5'}{2}\frac{4'.3'}{2}\left\{4.2 + 2.2'.2\right\} = \frac{6.5}{2}.1392 + \frac{6.5}{2}.4.264 + \frac{1}{2}\frac{6.5}{2}\frac{4.3}{2}16$$
$$= \mathbf{37440},$$

$$[\xi] = \frac{6'.5'}{2}\left\{2.2^{\cdot}.2.2 + 2.4'[2.2^{\cdot}.4 + 4.2] + 4.\frac{4'.3'}{2}.4\right\} + \frac{6'.5'}{2}.4'\left\{4.2 + 2.3'.4\right\}$$
$$= \frac{6.5}{2}.304 + \frac{6.5}{2}.4.32 = \mathbf{6480}.$$

Idet man behandler de andre Systemer paa samme Maade, kan man danne følgende Tavle, hvor den tykkere Streg adskiller de Tal, som man i hvert System forud kjender eller forud maa bestemme, og dem, som man finder ved Formlerne:

System.	α_1	$[\alpha_1]$	ξ	$[\xi]$	μ	μ'	b_1	x	$[b_1]$	β
$9P$	324	60	0	0	60	288	12	72	1	216
$8PL$	1488	282	0	0	288	1332	66	354	6	1020
$7P2L$	5772	1164	168	24	1332	5496	360	1692	36	4272
$6P3L$	19080	4128	1296	198	5496	19728	1776	7272	196	15840
$5P4L$	52440	12240	5814	960	19728	59940	7800	27528	954	51684
$4P5L$	117444	29730	17970	3120	59940	151008	28782	88722	3876	146256
$3P6L$	200448	56292	37440	6480	151008	301032	88356	239364	13096	352440
$2P7L$	247032	82464	53928	8904	301032	464976	205560	506592	32376	685152
$P8L$	207120	93648	56616	7728	464976	560688	352656	817632	57756	1041360
$9L$	108000		44604		560688	546120	454800	1015488		1243944

De ved saa vidtløftige Bestemmelser vigtige Prøver faar man ved strax at anvende de fundne Resultater for hvert enkelt System til de Bestemmelser, som nu skulle omtales i 63.

Tal. De foran disse staaende Tal ere de Koefficienter, som hidrøre fra den i 49 (og i 12) opstillede Regel.

Den anvendte Ordning sætter os ofte i Stand til at benytte samme Sammentælling i forskjellige Systemer. Saaledes faar man i 64 Brug for de enkelte Led i ξ. Havde man ordnet efter Antallene af givne Punkter, som befinde sig paa retliniede Grene, havde man faaet

$$\alpha_1 = \frac{3.2}{2}.7620 + 3.41052 + 54432,$$
$$[\alpha_1] = 2.7620 + 41052$$

og den tilsvarende Lettelse i Bestemmelsen af ξ og $[\xi]$.

63. Systemer $n=4$, $d=3$, $e=0$. — Ved Bestemmelsen af Karakteristiker i disse Systemer benytter man de i 39 udviklede Formler, idet man forud maa bestemme Antallet α_0 af Kurver sammensatte af Keglesnit og α_1 og $[\alpha_1]$ [ved 60], og idet man ifølge 62 kjender $(3d)$. Da Formlerne derefter for hvert enkelt System give saavel μ som μ', faar man Lejlighed til Prøver derved, at Karakteristiken μ' i et System er den samme som μ i det følgende.

Man har f. Ex. i Systemet $3P7L$: $(3d)=301032$, og man finder:

$$\alpha_0 = \frac{7'.6'}{1.2}.4.4 + \frac{7'.6'.5'}{1.2.3}.3^{\cdot}.4.2.4 + 2.7'\left[\frac{6'.5'}{1.2}.4.2.2 + \frac{6'.5'.4'}{1.2.3}.3^{\cdot}.4.2.4 + \frac{6'.5'}{1.2}.3^{\cdot}.2.2.4 + 6'.2.2\right]$$

$$+ 4.\frac{7'.6'}{2}\left[5'.2.2 + \frac{5'.4'}{2}.3^{\cdot}.4.4\right] = \mathbf{86352},$$

$$\alpha_1 = \frac{3.2}{2}.600.3 + 2.7\left[\frac{3.2}{2}.756 + 3.756.3\right] + 4.\frac{7.6}{2}.3.712 = \mathbf{311832},$$

$$[\alpha_1] = 2.600.3 + 2.7\,[2.756 + 756.3] + 4.\frac{7.6}{2}.712 = \mathbf{116328}.$$

Man finder saaledes:

Syst.	α_0	α_1	$[\alpha_1]$	$(3d)$	μ	μ'	b	x	$[b]$	β	$(2d)$
$10P$	504	1620	324	60	620	2184	768	708	96	2304	1296
$9PL$	1512	5400	1128	288	2184	7200	2952	2664	384	7776	4752
$8P2L$	3948	16272	3588	1332	7200	21776	10712	9380	1448	24440	16096
$7P3L$	10584	43344	10152	5496	21776	59424	35616	30120	4992	70416	49248
$6P4L$	23952	99360	24960	19728	59424	143040	106752	87024	15516	182496	134592
$5P5L$	46244	189360	51744	59940	143040	295544	281348	221408	42416	415424	322936
$4P6L$	71712	282600	86868	151008	295544	505320	633972	482964	99024	807336	663912
$3P7L$	86352	311832	116328	301032	505320	699216	1166352	865320	187248	1301280	1128576
$2P8L$	80864	237744	124272	464976	699216	783584	1705856	1240880	279152	1713536	1551808
$P9L$	59472	108000	108000	560688	783584	728160	1986672	1425984	329496	1849536	1730592
$10L$	35784	0		546120	728160	581904	1893528	1347408		1674144	1602576

64. Elementære Systemer $n=4$, $d=2$, $e=0$. — Bestemmelsen af disses Karakteristiker og Bestemmelsen af Karakteristikerne i Systemer af Kurver, der have et Røringspunkt mellem to Grene — hvilken sidste skal foretages i 65 — gribe saaledes ind i hinanden, at vi for at opstille dem adskilte allerede her maa benytte os af, at Karakteristiken μ i Systemet $10P$ i 65, som bliver Tallet $(2d)$ i det her betragtede System $11P$, er 200. I de følgende Systemer vil man derimod forud kjende μ, hvorfor det ifølge Formlerne i 55, hvor $\xi_1=\lambda=\nu=\psi=\chi=0$, vil være tilstrækkeligt at bestemme α_0, α_1 og ξ (ɔ: ξ_0) samt $[\alpha_1]$. Idet $(2d)$ hører med til de Tal, man derefter kan finde, kunne de Værdier, det faar i disse andre Systemer, benyttes i 65. For Prøvernes Skyld er det lettest at foretage de to Rækker Bestemmelser samtidigt.

Vi finde f. Ex. i Systemet $3P8L$ ved Hjælp af 63, 61 og for ξ's Vedkommende Keglesnitslæren (se desuden Noten til 62):

$$\alpha_0 = 699216 \,.\, 3 + 2 \,.\, 8 \,.\, 1166352 + 4 \,.\, \frac{8 \,.\, 7}{2} \,.\, 99024 = \mathbf{31849968},$$

$$\alpha_1 = \frac{3 \,.\, 2}{2} \,.\, 21004 \,.\, 3 + 2 \,.\, 8 \left[\frac{3 \,.\, 2}{2} \,.\, 9766 + 3 \,.\, 9766 \,.\, 3\right] + 4 \,.\, \frac{8 \,.\, 7}{2} \,.\, 3 \,.\, 3424 = \mathbf{3214572},$$

$$[\alpha_1] = 2 \,.\, 21004 \,.\, 3 + 2 \,.\, 8 \,[2 \,.\, 9766 + 9766 \,.\, 3] + 4 \,.\, \frac{8 \,.\, 7}{2} \,.\, 3424 = \mathbf{1290792},$$

$$\xi_0 = \frac{8 \,.\, 7 \,.\, 6 \,.\, 5}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} \,.\, 1392 + \frac{8 \,.\, 7}{1 \,.\, 2} \cdot \frac{6 \,.\, 5 \,.\, 4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \,.\, 264 + \frac{1}{2}\, \frac{8 \,.\, 7}{2}\, \frac{6 \,.\, 5}{2} \cdot \frac{4 \,.\, 3}{1 \,.\, 2} \,.\, 16 = \mathbf{265440}.$$

Man kan da danne følgende Tavle, hvori vi ikke medtage nogen Pille μ', idet μ' kan aflæses nedenfor μ.

Syst.	α_0	α_1	$[\alpha_1]$	ξ_0	μ	b	x	$[b]$	$(2d)$
$11P$	1860	165	30	0	225	170	70	20	200
$10PL$	8088	690	132	0	1010	832	336	102	992
$9P2L$	33792	2772	564	0	4396	3972	1580	508	4784
$8P3L$	134208	10752	2352	0	18432	18336	7248	2448	22176
$7P4L$	497952	40320	9600	168	73920	81312	32256	11328	97776
$6P5L$	1696320	143760	37680	2280	280560	342240	136920	49620	406080
$5P6L$	5193768	472320	138432	16530	994320	1350952	544976	203272	1578892
$4P7L$	13954512	1366572	457494	80010	3230956	4908332	1988070	765288	5680504
$3P8L$	31849968	3214572	1290792	265440	9409052	16076136	6489448	2599328	18642496
$2P9L$	60019872	5559960	3019440	615888	23771160	45412832	18153616	7567088	53286656
$P10L$	92165280	5797680	5797680	1015560	50569520	106132960	41873520	18037920	126487760
$11L$	115892448	0		1122660	89120080	201239472	78339716		243554192
					129996216				

65. Systemer af Kurver af 4de Orden med Røring mellem to Grene. — Man benytter Formlerne i 56. Af den anden og tredie blandt disse udleder man

$$3\mu = 6\iota + \alpha_1 + 4\xi + 5\lambda + 8\nu.$$

Denne Formel maa i hvert Fald benyttes til Bestemmelse af Karakteristiken μ i System $10P$, hvor $\xi = \lambda = \nu = 0$; thi denne Karakteristik benyttes i 64. I de øvrige Systemer vil μ derimod være bekjendt fra 64, og den anførte Ligning kan tjene dels til Prøve dels til Bestemmelse af de ubekjendte Koefficienter i λ og ν [se Slutningen af 49].

Man har saaledes ifølge 64, at i System $4P6L$ $\mu = 1578892$, og idet τ bestemmes ved 62, α_1 og $[\alpha_1]$ ved 61, ξ ved Sætninger om Keglesnit, finder man(1)

$$\tau = 151008 + 2\,.\,6\,.\,28782 + 4\,.\,\frac{6\,.\,5}{2}\,.\,954 = \mathbf{553632},$$

$$\alpha_1 = \frac{4\,.\,3}{2}\,.\,9766 + 4\,.\,3424\,.\,6 + 2\,.\,6\left[\frac{4\,.\,3}{2}(3424 - 2\,.\,856) + 4(3424 + 976\,.\,4) + 976\,.\,3\,.\,4\right]$$
$$+ 4\,.\,\frac{6\,.\,5}{2}[4\,.\,488 + 256\,.\,4] = \mathbf{934884},$$

$$[\alpha_1] = 3\,.\,9766 + 3424.6 + 2.6[3.1712 + 7328] + 4.\frac{6\,.\,5}{2}.\,488 = \mathbf{228690},$$

$$\xi = \frac{6'.\,5'.\,4'}{1\,.\,2\,.\,3}\left\{4\,.\,\frac{4^{\cdot}.\,3^{\cdot}}{2}.\,4\,.\,2 + (2+1)\,3'\left[4\,.\,\frac{4^{\cdot}.\,3^{\cdot}}{2}.\,4 + 2\,.\,4^{\cdot}.\,4\,.\,2\right] + (4+1)\frac{3'.\,2'}{2}.\,2\,.\,4^{\cdot}.\,2\right.$$
$$\left. + 2\,.\,3'.\,2'\left[4\,.\,\frac{4^{\cdot}.\,3^{\cdot}}{2}.\,2 + 2\,.\,4^{\cdot}.\,6 + 2\,.\,2^2\right] + (4+2)\frac{3'.\,2'}{2}.\,1'[2\,.\,4^{\cdot} + 2]\right\}$$
$$+ \frac{6'.\,5'}{1\,.\,2}\cdot\frac{4'.\,3'}{1\,.\,2}\left\{2\,.\,4^{\cdot}.\,4\,.\,2 + (2+1)\,2'[2\,.\,4^{\cdot}.\,2 + 2\,.\,2] + (4+1)\frac{2'.\,1'}{2} + 2\,.\,2'.\,1'[2.4^{\cdot} + 3]\right\}$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{6'.\,5'}{2}\frac{4'.\,3'}{2}.\,2'\{2\,.\,2 + (2+1)\} = \mathbf{87600},$$

$$\lambda = 9\,.\,\frac{4\,.\,3}{2}\,.\,A = \mathbf{54}A, \quad [\lambda] = 3\,.\,3A = \mathbf{9}A. \quad \lambda = 0.$$

Man finder da ved Indsættelse i ovenstaaende Formel, at $A = 480$, eller at Bestemmelsen af en Kurve λ med Røring mellem to af de Grene, der falde sammen i den tredobbelte rette Linie, ved Beliggenheden af de retliniede Grene og de 6 enkelte Toppunkter, giver 480 Opløsninger.

Idet denne Koefficient A er bestemt, kan man i de følgende Systemer finde λ og $[\lambda]$. Den anførte Formel kan da paany i Systemet $2P8L$ benyttes til Bestemmelse af den Koefficient, som indgaar i ν. Man finder da, at Bestemmelsen af en Kurve ν med Røring mellem to af de Grene, der falde sammen i den firdobbelte rette Linie, ved Beliggenheden af denne Linie og af de 8 Toppunkter, giver 43680 Opløsninger.

De herhen hørende Bestemmelser, ved hvilke ogsaa μ' er forud bekjendt, indeholdes forøvrigt i følgende Tavle, hvor μ' aflæses nedenfor μ, og hvor $A = 480$, $B = 43680$.

---

(1) Ved Bestemmelsen af α_1 benytter man, at der i et System af Kurver uden særegne Punkter vil være $\mu - 2[L]$ Kurver, som gaa gjennem et Punkt af en given Tangent L uden at høre til de $[L]$, der have dette Punkt til Røringspunkt. Desuden benyttes anden Sætning i 29. — Ved Bestemmelsen af ξ benytter man blandt andet, at Indhyllingskurven for de rette Linier, som forbinde to faste rette Liniers Skjæringspunkter med Kurver i et System, er af Klassen $(2n-1)\mu$. Se forøvrigt Noten til 62.

Syst.	τ	α_1	$[\alpha_1]$	ξ	$\frac{\lambda}{A}$	$\frac{[\lambda]}{A}$	$\frac{\nu}{B} = 4\frac{[\nu]}{B}$	μ	b_1	$[b_1]$
$10P$	60	240	42	0	0	0	0	200	52	5
$9PL$	312	1104	200	0	0	0	0	992	292	30
$8P2L$	1600	4752	904	0	0	0	0	4784	1632	180
$7P3L$	7728	19488	3936	168	0	0	0	22176	8736	1032
$6P4L$	34800	76080	16400	2112	0	0	0	97776	44088	5566
$5P5L$	145780	278880	64192	16170	0	0	0	406080	206312	27580
$4P6L$	553632	934884	228690	87600	54	9	0	1578892	865532	120580
$3P7L$	1863600	2772072	715064	356160	693	119	0	5680504	3183092	454760
$2P8L$	5220688	6939168	1874296	1077888	3234	448	16	18642496	9678016	1349252
$P9L$	11570640	14144640	3982560	2410632	6804	0	144	53286656	23334088	3003866
$10L$	20038200	23190720		3974040	0		630	126487760	44300872	
								243554192		

66. Systemer af fjerde Orden med et fast og et frit Dobbeltpunkt. — Ligningerne i 55 give

$$7\mu = \mu' + \alpha_1 + 2(2d) + 6\xi_0 + 2\xi_1 + 9\lambda + 16\nu + 6\psi + 6\chi.$$

Idet man fra 64 kjender μ og μ', og man kan bestemme α_1 ved 61, $(2d)$ ved 65, og idet ξ_0, ξ_1, ψ og χ og — paa nogle Koefficienter nær — λ og ν kun bero paa Bestemmelser af Keglesnit og rette Linier, kan denne Ligning dels tjene til Prøve paa disse Bestemmelser, dels benyttes til Bestemmelsen af de ubekjendte Koefficienter i λ og ν, ganske som i 65. Man vil da finde, at Bestemmelsen af en Kurve λ eller ν, hvis sammenfaldende Grene skulle danne to Dobbeltpunkter, ved Beliggenheden af de retliniede Grene, af de enkelte Toppunkter og et af Dobbeltpunkterne henholdsvis giver 360 og 32760 Opløsninger. I efterstaaende Tavle ere disse Koefficienter betegnede ved A og B.

Formlerne i 55 kunne derefter tjene til Bestemmelse af b og $[b]$, der betegne Antallene af Kurver, hvis frie Dobbeltpunkt falder paa en given ret Linie eller i et af Systemets givne Punkter.

Ved Bestemmelsen af de særegne Kurvers Antal maa det iagttages, at enhver Kurve $(2d)$, ξ_0 og ξ_1, som tilfredsstiller Systemets Betingelser, skal medtages to Gange i Tallet $(2d)$, ξ_0 eller ξ_1. Det sidste er allerede anført i Slutningen af 49, og da i Kurverne $(2d)$ og ξ_0 det frie Dobbeltpunkt falder sammen med det faste, kommer man til dette Resultat gjennem den selvsamme Betragtning, som har ført til Hovedregelen i 49 (om Kurver med en Mangefoldsgren, som rører en Kurve, som Systemets Kurver skulle røre). Som Exempel paa Bestemmelsen kunne vi tage Systemet $2P7L$, hvor $\mu = 765288$, $\mu' = 2599328$:

$$\alpha_1 = 2\,.\,9766\,.\,2 + 2\,.\,7\,[2\,.\,3424 + 3424\,.\,3] + 4\,.\,\frac{7\,.\,6}{2}\,.\,976 = \mathbf{360728},$$

$$[\alpha_1] = 9766\,.\,2 + 2\,.\,7\,.\,3424 = \mathbf{67468},$$

$$\frac{1}{2}(2d) = \mathbf{454760},$$

$$\frac{1}{2}\xi_0 = \frac{7\,.\,6\,.\,5\,.\,4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\left\{2.2.4 + 2.3\,[2.2.4 + 4.2] + 4.\frac{3.2}{2}.2\right\} + \frac{7.6}{2}\cdot\frac{5.4.3}{1.2.3}\left\{4 + 2\,.\,2\,.\,2\right\}$$
$$= \mathbf{8960}.$$

$$\frac{1}{2}\xi_1 = 8\,.\,\frac{7\,.\,6\,.\,5\,.\,4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\cdot\frac{3\,.\,2}{2}\,.\,2 + 4\,.\,\frac{7\,.\,6}{2}\cdot\frac{5\,.\,4\,.\,3}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,2 = \mathbf{3360},$$

$$\frac{1}{A}\lambda = \frac{7\,.\,6}{2} + 2\,.\,7\,[3\,.\,2 + 1] = \mathbf{119}, \quad \frac{1}{A}[\lambda] = 2\,.\,7 = \mathbf{14}, \quad \nu = [\nu] = 0,$$

$$\psi = \frac{7\,.\,6\,.\,5\,.\,4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\left\{2\,.\,2\,.\,2 + 4\,.\,2 + 2\,.\,3\,[2\,.\,2\,.\,2 + 8] + 4\,.\,\frac{3\,.\,2}{2}\,.\,2\right\}$$
$$+ \frac{7\,.\,6}{2}\cdot\frac{5\,.\,4\,.\,3}{1\,.\,2\,.\,3}\left\{4 + 2\,.\,2\,.\,2\right\} = \mathbf{7280},$$

$$[\psi] = \frac{7\,.\,6\,.\,5\,.\,4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\left\{2 + 2\,.\,3\,.\,2\right\} = \mathbf{490},$$

$$\chi = 4\left(\frac{7'.\,6'}{2}\left(2\cdot.\frac{5'.\,4'}{2} + 5'\right) + 2\,.\,7'\left[2\cdot.\frac{6'.\,5'}{2} + \frac{6'.\,5'}{2}\right]\right) = \mathbf{4620},$$

$$[\chi] = 2\left(\frac{7\,.\,6}{2}\cdot\frac{5\,.\,4}{2} + 2\,.\,7\,.\,\frac{6\,.\,5}{2}\right) = \mathbf{840}.$$

Bestemmelserne indeholdes forøvrigt i efterfølgende Tavle:

Syst.	α_1	$[\alpha_1]$	$\frac{(2d)}{2}$	$\frac{\xi_0}{2}$	$\frac{\xi_1}{2}$	$\frac{\lambda}{A}$	$\frac{[\lambda]}{A}$	$\frac{\nu}{B}$	ψ	$[\psi]$	χ	$[\chi]$	μ	b	$[b]$
$9P$	18	2	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	9	1
$8PL$	86	10	30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	102	52	6
$7P2L$	388	48	180	0	0	0	0	0	0	0	0	0	508	300	36
$6P3L$	1680	224	1032	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2448	1680	212
$5P4L$	7040	1024	5566	10	30	0	0	0	22	2	0	0	11328	9050	1218
$4P5L$	28288	4512	27580	190	330	0	0	0	310	30	0	0	49620	45564	6516
$3P6L$	106176	18560	120580	1620	1620	9	1	0	1980	180	360	60	203272	206292	31176
$2P7L$	360728	67468	454760	8960	3360	119	14	0	7280	490	4620	840	765288	819240	130656
$P8L$	1050520	198264	1349252	31640	0	448	0	4	16100	630	26040	4620	2599328	2596800	422232
$9L$	2540520		3003866	68040	0	0		36	20412		94500		7567088	6240240	
													18037920		

μ' aflæses ogsaa her nedenfor μ, og i System $P8L$ er $[\nu] = \frac{1}{4}\nu = B$. Ellers er $[\nu] = 0$.

67. Systemer af fjerde Orden med et Dobbeltpunkt paa en given ret Linie samt et frit Dobbeltpunkt. — Man benytter de samme Ligninger som i 66. Idet ogsaa Koefficienterne λ og ν ere de samme, tjener den Ligning, som benyttedes ved disses Bestemmelse, kun til Prøve. Det geometriske Sted for Dobbeltpunkter er sammensat af det geometriske Sted for det frie Dobbeltpunkt af Ordenen b_0 og af den givne rette Linie taget b_1 Gange, idet b_1 er Antallet af Kurver, der have Dobbeltpunktet beliggende i et fast Punkt af Linien, og altsaa er bekjendt fra 66. Vi maa have $b = b_0 + b_1$. — Om Bestemmelsen af $(2d)$, ξ_0 og ξ_1 gjælde samme Bemærkninger som i 66. Tallene $[b]$ behøve vi ikke at tage Hensyn til, da de ville være de samme som Tallene b i de i 66 undersøgte Systemer. Deres Bestemmelse kan dog give en ny Prøve.

Som Exempel kunne vi tage Systemet $3P7L$; mellem de herhen hørende Bestemmelser og dem, der ere foretagne i Exemplet i 66, vil man let opdage nogen Sammenhæng (¹). Man finder

$$\alpha_1 = \left(\frac{3^{\cdot}.\,2^{\cdot}}{2} + 3^{\cdot}.\,3\right) 9766\,.\,2 + 2\,.\,7'\left[\frac{3^{\cdot}.\,2^{\cdot}}{2} + 3^{\cdot}.\,5 + 3^2\right] 3424 + 4\,.\,\frac{7'.\,6'}{2}[3^{\cdot} + 3]\,976$$
$$= \mathbf{2020560},$$

$$\tfrac{1}{2}(2d) = \mathbf{3183092},$$

$$\tfrac{1}{2}\xi_0 = \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}\left\{4.\frac{3.2}{2}.4 + 2.3.4.2 + 2.3\left[4.\frac{3.2}{2}.4 + 2.3.3.4 + 4.2^2\right] + 4.\frac{3.2}{2}\left[2.3.2 + 2.2\right]\right\}$$
$$+ \frac{7\,.\,6}{2}\cdot\frac{5\,.\,4\,.\,3}{1\,.\,2\,.\,3}\left\{2\,.\,3\,.\,4 + 4\,.\,2 + 2\,.\,2\,[2\,.\,3\,.\,2 + 3\,.\,2] + 4\,.\,\frac{2\,.\,1}{2}\,.\,1\right\}$$
$$+ \frac{1}{2}\,\frac{7\,.\,6}{2}\,\frac{5\,.\,4}{2}\cdot\frac{3\,.\,2}{1\,.\,2}\left\{2 + 2\,.\,1\right\} = \mathbf{62580},$$

$$\tfrac{1}{2}\xi_1 = 8\,.\,\frac{7'.\,6'.\,5'.\,4'}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\left\{2\,.\,3^{\cdot}.\,\frac{3'.\,2'}{2}\,.\,2^{\cdot} + \frac{3'.\,2'}{2}\cdot\frac{3^{\cdot}.\,2^{\cdot}}{2}\right\}$$
$$+ 4\,.\,\frac{7'.\,6'}{2}\cdot\frac{5'.\,4'.\,3'}{1\,.\,2\,.\,3}\left\{2\,.\,3^{\cdot}.\,2^{\cdot} + \frac{3^{\cdot}.\,2^{\cdot}}{2}\,.\,2' + \frac{2'.\,1'}{2}\,.\,3^{\cdot}\right\} + 2\,.\,\frac{1}{2}\,\frac{7\,.\,6}{2}\,\frac{5\,.\,4}{2}\cdot\frac{3\,.\,2}{1\,.\,2}\,.\,3$$
$$= 8\,.\,\frac{7\,.\,6\,.\,5\,.\,4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,.\,45 + 4\,.\,\frac{7\,.\,6}{2}\cdot\frac{5\,.\,4\,.\,3}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,21 + \frac{7\,.\,6}{2}\cdot\frac{5\,.\,4}{2}\cdot\frac{3\,.\,2}{2}\,.\,3 = \mathbf{32130},$$

$$\frac{1}{A}\lambda = \frac{7'.\,6'}{2}\,.\,3\,.\,3^{\cdot} + 2\,.\,7'\left[9\,.\,\frac{3^{\cdot}.\,2^{\cdot}}{2} + 3\,.\,3^{\cdot}\right] = \mathbf{693}, \qquad \nu = 0,$$

(¹) Angaaende α_1 og ξ_0 se sidste Del af Noten til 65. De delvise Sammentælninger af ξ_1 og ψ have Hensyn til det følgende. I Ordningen af de forskjellige Led i χ (ligesom senere i $\varkappa$) tages navnlig Hensyn til de dobbelte (tredobbelte) Toppunkter.

$$\psi = \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}\left\{4.\frac{3.2}{2}.2+2.3.4.2+2.3\left[4.\frac{3.2}{2}.2+2.3.8+4.2\right]+4.\frac{3.2}{2}[2.3.2+2]\right\}$$
$$+\frac{7.6}{2}\cdot\frac{5.4.3}{1.2.3}\left\{2.3.4+4.2+2.2[2.3.2+6]+4.\frac{2.1}{2}.1\right\}+\frac{1}{2}\,\frac{7.6}{2}\,\frac{5.4}{2}\cdot\frac{3.2}{1.2}\left\{4+2.1\right\}$$
$$=\frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}.720+\frac{7.6}{2}\cdot\frac{5.4.3}{1.2.3}.108+\frac{1}{2}\,\frac{7.6}{2}\,\frac{5.4}{2}\cdot\frac{3.2}{2}.6 = \mathbf{49770},$$

$$\chi = 8\left(\frac{7'.6'}{2}.3\cdot\left(\frac{5'.4'}{2}+5'\right)+2.7'.2.\frac{3\cdot.2\cdot}{2}\cdot\frac{6'.5'}{2}\right) = \mathbf{17640}.$$

Resultaterne ere forøvrigt sammenfattede i følgende Tavle, hvor μ' aflæses nedenfor μ, og hvor $A = 360$, $B = 32760$:

Syst.	α_1	$\frac{2d}{2}$	$\frac{\xi_0}{2}$	$\frac{\xi_1}{2}$	$\frac{\lambda}{A}$	$\frac{\nu}{B}$	ψ	χ	μ	b_1	b_0
$10P$	150	52	0	0	0	0	0	0	170	20	74
$9PL$	684	292	0	0	0	0	0	0	832	102	408
$8P2L$	2940	1632	0	0	0	0	0	0	3972	508	2240
$7P3L$	12096	8736	0	0	0	0	0	0	18336	2448	11904
$6P4L$	48000	44088	84	180	0	0	144	0	81312	11328	60672
$5P5L$	181920	206312	1460	2100	0	0	1940	0	342240	49620	290624
$4P6L$	640704	865532	11805	11295	54	0	12510	1440	1350952	203272	1262998
$3P7L$	2020560	3183092	62580	32130	693	0	49770	17640	4908332	765288	4848960
$2P8L$	5336616	9678016	222880	43680	3234	16	133000	93240	16076136	2599328	15299384
$P9L$	11119920	23334088	544824	0	6804	144	244944	294840	45412832	7567088	37782752
$10L$	17393040	44300872	941220	0	0	630	296730	633150	106132960	18037920	72166224
									201239472		

68. Systemer af 4de Orden med et fast Dobbeltpunkt eller et Dobbeltpunkt paa en given ret Linie. — Bestemmelsen af Karakteristikerne i disse Systemer, hvortil man benytter Ligningerne i 54, maa foretages samtidig paa Grund af, at de dertil hørende Tal λ og ν indeholde flere ubekjendte Koefficienter, end man kan finde alene ved den ene Række Systemers Prøveligninger. Disse Koefficienter ere følgende:

A er Antallet af Kurver λ med et Dobbeltpunkt, som bestemmes ved Beliggenheden af de to retliniede Grene og af de 8 enkelte Toppunkter, medens Dobbeltpunktet er et ubekjendt Punkt af den tredobbelte retliniede Gren.

B er Antallet af Kurver λ med et Dobbeltpunkt, som bestemmes ved Beliggenheden af de to retliniede Grene, af Dobbeltpunktet og 7 af de enkelte Toppunkter.

C er Antallet af Kurver λ med Dobbeltpunkt, som bestemmes ved Beliggenheden af den 3-dobbelte rette Linie, af de enkelte Toppunkter og Dobbeltpunktet samt et Punkt af den enkelte retliniede Gren.

D er Ordenen af det geometriske Sted for et enkelt Toppunkt, Dobbeltpunktet eller det dobbelte Toppunkt paa en Kurve λ med Dobbeltpunkt, hvis 3-dobbelte Gren drejer sig om et fast Punkt, medens de øvrige af de anførte Punkter bevæge sig paa rette Linier. Hvis en af disse rette Linier gaar gjennem det faste Punkt, eller, med andre Ord, hvis det faste Punkt er Dobbeltpunktet, et enkelt Toppunkt eller det dobbelte Toppunkt, maa man ombytte D med $D-A$, $D-B$ eller $D-C$.

E er Antallet af Kurver ν med et Dobbeltpunkt, som bestemmes ved Beliggenheden af den 4-dobbelte rette Linie samt af de 10 Toppunkter.

F er Antallet af Kurver ν med et Dobbeltpunkt, som bestemmes ved Beliggenheden af den rette Linie, 9 af Toppunkterne samt Dobbeltpunktet.

G er Ordenen af det geometriske Sted for et Toppunkt eller Dobbeltpunktet paa en Kurve ν med Dobbeltpunkt, naar den rette Linie drejer sig om et fast Punkt, medens de øvrige af disse Punkter gjennemløbe rette Linier. Er det faste Punkt selv Dobbeltpunktet eller et enkelt Toppunkt, maa G ombyttes med $G-E$ eller $G-F$.

Ved Bestemmelsen af Karakteristikerne og disse Koefficienter benyttes nu følgende to Ligninger i 54:

$$\alpha = 20\mu - 10b - 20\xi_1 - 30\lambda - 50\nu - 30\psi - 22\chi - 12\xi_2 - 20\eta - 30\zeta - 20\varkappa_1 - 16\varkappa_2 - 10\theta,$$
$$\mu' = 6\mu - 2b - 2\xi_1 - 6\lambda - 12\nu - 4\psi - 4\chi - 2\xi_2 - 3\eta - 4\zeta - 3\varkappa_1 - 3\varkappa_2 - 2\theta.$$

Heri kan man direkte bestemme α (ved 64, 66 og 67) samt, paa de anførte Koefficienter i λ og ν nær, ξ_1, λ, ν, ψ, χ, ξ_2, η, ζ, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, θ, som kun bero paa Bestemmelse af rette Linier og Keglesnit. I Systemer af Kurver med givet Dobbeltpunkt er desuden $b=0$, hvorved μ og μ' kunne bestemmes, dog i de Systemer, hvor ikke $\lambda=0$, $\nu=0$, foreløbig kun som lineære Funktioner af Koefficienter A, B, C.... I Systemerne af Kurver med Dobbeltpunkt paa en given ret Linie vil man opnaa det samme, idet i ethvert af disse Systemer Størrelsen b er Antallet af Kurver med Dobbeltpunkt i et fast Punkt af den givne rette Linie, altsaa en Karakteristik i Rækken af Systemer med givet Dobbeltpunkt.

Nu er tillige i begge Rækker Systemer Karakteristiken μ i et System ligestor med Karakteristiken μ' i det foregaaende, hvilket dels giver de fornødne Ligninger til Bestemmelsen af Koefficienterne A, B, C...., dels giver Prøveligninger. Idet nedenstaaende Tavle viser, at Koefficienterne indføres efterhaanden og lige tidligt i de to Rækker Systemer, vil det være bekvemt at lade Undersøgelserne af de to Rækker Systemer følges ad for saa snart som muligt at faa de indførte Koefficienter bestemte, saaledes at man ikke kommer til at regne med Ligninger med mange ubekjendte. Af denne Grund bliver det allermest bekvemt — hvad jeg ogsaa har gjort ved den virkelige Bestemmelse — ogsaa at lade Undersøgelsen af de Systemer, som skulle omtales i 69, følge med Undersøgelsen af de Rækker Systemer, som her beskjæftige os.

Hvad der volder mest Arbejde, er her som overalt Bestemmelsen af Tallene ξ_1, λ o. s. v. Som Exempel skulle vi vise denne Bestemmelse for Systemet $2P\,9L$ i Rækken af Systemer af Kurver med Dobbeltpunktet paa en given ret Linie:

$$\alpha = 45412832 + 2 \cdot 9 \cdot 15299384 + 4 \cdot \frac{9 \cdot 8}{2} \cdot 819240 = \mathbf{438772304},$$

$$\frac{\xi_1}{2} = 8 \cdot \frac{9.8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5.6}\left\{\frac{3.2}{2}[2 \cdot 2(1+1)+2+1]\right\} + 4 \cdot \frac{9.8}{2} \cdot \frac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5}\left\{2.2.2 + 2.2 + 2 + 2 + 1\right\}$$
$$+ 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9.8}{2} \frac{7.6}{2} \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}\left\{2+1\right\} = \mathbf{84924},$$

$$\lambda = B\left(\frac{1}{2}\frac{9.8}{2} \cdot \frac{7.6}{2} + 2.9\left[3.2.\frac{8.7}{2} + \frac{8.7}{2}\right] + 4.\frac{9.8}{2}.3.2\right) + C.3.2.\frac{9.8}{2} + D.3.2.2.9$$
$$+ (D-B)\frac{9.8}{2} + (D-C)\,2.9 = \mathbf{4734}\,B + \mathbf{198}\,C + \mathbf{162}\,D,$$

$$\nu = \mathbf{16} \cdot F,$$

$$\psi = \frac{9.8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5.6}\left\{4 \cdot \frac{2.1}{2} \cdot 1 + 2.2.6 + 4.2 + 2.3[2.2.2 + 4]\right\}$$
$$+ \frac{9.8}{2} \cdot \frac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5}\left\{2.2.2 + 8 + 2.2.2\right\} + \frac{1}{2}\frac{9.8}{2}\frac{7.6}{2} \cdot \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4} \cdot 2 = \mathbf{30996}$$

$$\chi = 4\left(\frac{9.8}{2}\left(\frac{2.1}{2} + 2\right)\frac{7.6.5}{1.2.3} + 2.9 \cdot \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}\right) = \mathbf{20160},$$

$$\frac{\xi_2}{2} = \frac{9.8.7.6}{1.2.3.4}\left\{4.\frac{2.1}{2}.1 + 2.5\left[4.\frac{2.1}{2}.2 + 2.2.2.2\right] + 4.\frac{5.4}{2}\left[2.2.4 + 4.\frac{2.1}{2}.4 + 2.2.3.4 + 4.2^2\right]\right.$$
$$\left. + 8.\frac{5.4}{2}.3[2.2.4 + 4.2] + 16.\frac{1}{2}\frac{5.4}{2}\frac{3.2}{2}.2\right\}$$
$$+ \frac{9.8}{2} \cdot \frac{7.6.5}{1.2.3}\left\{2.2.2 + 2.4[2.2.4 + 4.2] + 4.\frac{4.3}{2}[4 + 2.2.4 + 3.4] + 8.\frac{4.3}{2}.2.2\right\}$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{9.8}{2}\frac{7.6}{2} \cdot \frac{5.4}{1.2}\left\{4 + 2.3.4 + 4.\frac{3.2}{2}.2\right\} = \frac{9.8.7.6}{1.2.3.4} \cdot 10324 + \frac{9.8}{2} \cdot \frac{7.6.5}{1.2.3} \cdot 1160$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{9.8}{2}\frac{7.6}{2} \cdot \frac{5.4}{2} \cdot 52 = \mathbf{2958984},$$

$$\eta = \frac{9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5}\left\{4.\frac{2.1}{2}.1 + 2.2.2.2 + 3.4\,[4.\frac{2.1}{2}1 + 2.2.6 + 4.2] + 9.\frac{4.3}{2}[2.2.2+4]\right\}$$
$$+\frac{9.8}{2}.\frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}\left\{2.2.2 + 4.2 + 3.3\,[2.2.2+8] + 9.\frac{3.2}{2}.2\right\} + \frac{1}{2}\frac{9.8}{2}\frac{7.6}{2}.\frac{5.4.3}{1.2.3}\left\{4+3.2.2\right\}$$
$$= \frac{9.8.7.6}{1.2.3.4}1100 + \frac{9.8}{2}.\frac{7.6.5}{1.2.3}.214 + \frac{1}{2}\frac{9.8}{2}\frac{7.6}{2}.\frac{5.4}{2}.16 = \mathbf{468720},$$

$$\zeta = 16.\frac{9.8}{2}.\frac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5}.\frac{2.1}{2} + 4.\frac{1}{2}\frac{9.8}{2}\frac{7.6}{2}.\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}.1 = \mathbf{19656},$$

$$\varkappa_1 = 4\left(\frac{2\cdot.1\cdot}{2}.\frac{1}{2}\frac{9.8}{2}\frac{7.6}{2}.5 + 2\cdot.\frac{9.8}{2}.\frac{7.6}{2} + 0 + 3.9\left[\frac{2\cdot.1\cdot}{2}.\frac{8.7}{2}.6 + 2\cdot\left(\frac{8.7}{2}+\frac{8.7}{2}.6\right)+\frac{8.7}{2}\right]\right.$$
$$\left.+\,9.\frac{9.8}{2}.2\cdot.7\right) = \mathbf{95256}$$

$$\varkappa_2 = 4\left(\frac{2.1}{2}.\frac{1}{2}\frac{9.8}{2}\frac{7.6}{2}.\frac{5.4.3}{1.2.3} + 2.\frac{9.8}{2}.\frac{7.6}{2}\frac{5.4}{2} + \frac{1}{2}\frac{9.8}{2}\frac{7.6}{2}.5\right.$$
$$\left.+\,3.9\left[\frac{2.1}{2}.\frac{8.7}{2}.\frac{6.5.4}{1.2.3} + 2\left(\frac{8.7}{2}.\frac{6.5}{2}+\frac{8.7}{2}.\frac{6.5.4}{1.2.3}\right)+\frac{8.7}{2}.\frac{6.5}{2}\right] + 9.\frac{9.8}{2}.2.\frac{7.6.5}{1.2.3}\right)$$
$$= \mathbf{491400},$$

$$\vartheta = 2\left(\frac{9.8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5.6}.2^6.2^5.4 + \frac{9.8}{2}.\frac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5}.2^5.2^4.4 + \frac{1}{2}\frac{9.8}{2}\frac{7.6}{2}.\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}.2^4.2^3.2\right.$$
$$\left.+\,\frac{1}{1.2.3}\frac{9.8}{2}\frac{7.6}{2}\frac{5.4}{2}.\frac{3.2.1}{1.2.3}.2^3.2^2.1\right) = \mathbf{5521152}.$$

I Systemer med fast Dobbeltpunkt foretages Bestemmelserne paa samme Maade, men ere gjennemsnitlig noget simplere, og flere Sammentællinger benyttes i begge Rækker Bestemmelser.

Man finder da for Systemer med fast Dobbeltpunkt, at

i Systemet $(10-t)\ PtL$ er for $t<4$, $\mu = 6^t$, $\mu' = 6^{t+1}$,

og dernæst:

Syst.	α	$\frac{\xi_1}{2}$	λ	ν	ψ	χ	$\frac{\xi_2}{2}$	η	ζ	$\varkappa_1$	$\varkappa_2$	ϑ	μ
$6P4L$	25632	0	0	0	0	0	12	0	0	0	0	0	1296
$5P5L$	148600	0	0	0	0	0	230	22	0	0	0	0	7728
$4P6L$	823120	24	0	0	9	0	2640	444	27	0	0	1024	45382
$3P7L$	4200720	462	$9B$	0	119	0	20160	3864	315	168	840	19712	258112
$2P8L$	19198880	4242	$-A$ $+140B$ $+6C$ $+D$	0	672	280	110320	1 704	1120	3472	15680	214144	1379412
$P9L$	73123952	24948	$-18A$ $+648B$ $+36C$ $+18D$	$4F$	2016	2520	416052	51660	0	29484	117180	1380288	6732832
$10L$	214988880	108360	0	$-E$ $+45F$ $+G$	2940	12600	965160	75474	0	156870	491400	5851860	27850500
													91446048

For Systemer med Dobbeltpunkt paa en given ret Linie finder man

Syst.	α	$\frac{\xi_1}{2}$	λ	ν	ψ	χ	$\frac{\xi_2}{2}$	η	ζ	$\varkappa_1$	$\varkappa_2$	ϑ	μ
$11P$	170	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9
$10PL$	980	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	52
$9P2L$	5640	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	300
$8P3L$	32400	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1728
$7P4L$	183744	0	0	0	0	0	84	0	0	0	0	0	9936
$6P5L$	1016160	0	0	0	0	0	1560	144	0	0	0	0	56688
$5P6L$	5381440	120	0	0	72	0	17325	2826	150	0	0	4096	318000
$4P7L$	26417680	2184	$54B$	0	1057	0	130620	25116	1911	672	3360	78848	1729898
$3P8L$	116764200	18102	$828B + 27C + 9D$	0	7378	1680	724080	133980	9366	12768	63840	856576	8888960
$2P9L$	438772304	84924	$4734B + 198C + 162D$	$16F$	30996	20160	2958984	468720	19656	95256	491400	5521152	41976108
$P10L$	1329212000	216720	$11880B + 450C + 900D$	$180F + 4G$	81480	119700	8803620	1088388	0	381780	2230200	23407440	172056352
$11L$	3161749200	0	0	$935F + 55G$	121044	485100	18399150	1541232	0	686070	7172550	71012172	580054968 1563293916

idet b aflæses paa den foregaaende Tavle som μ' i det System, hvor de givne Punkters Antal er det samme. I begge Tavler aflæses μ' nedenfor μ. Som Resultater faas foruden Værdierne af μ og μ':

$$A = C = \mathbf{1092}, \quad B = \mathbf{574}, \quad D = \mathbf{3388},$$
$$E = \mathbf{206640}, \quad F = \mathbf{97776}, \quad G = \mathbf{592200}.$$

69. Elementære Systemer $n = 4$, $d = 1$, $e = 0$. — Man benytter de samme Formler som i 68, idet Undersøgelsen dog lettes ved, at de usædvanlige særegne Kurver bortfalde. Af Koefficienter i λ og ν træffer man kun paa A og E, som vi allerede have bestemt i 68. Fra 68 kjender man desuden b, saa den Ligning, hvor α udtrykkes, blot vil tjene til Prøveligning undtagen i Systemet $12P$ — med mindre man foretager denne Række Bestemmelser samtidig med de to Rækker Bestemmelser i 68.

Ved Bestemmelsen af ξ_1 og ψ kan man benytte, hvad der i 67 er fundet ved de tilsvarende Bestemmelser med Hensyn til Systemer med to Dobbeltpunkter, hvoraf det ene paa en given ret Linie. α findes ved 64, 66 og 67. Man finder f. Ex. for Systemet $3P9L$, foruden $b = 41976108$ (se 68)

$$\alpha = 23771160 . 2 + 2 . 9 . 16076136 + 4 . \frac{9 . 8}{2} . 765288 = \mathbf{447114240},$$

$$\frac{\xi_1}{2} = 8 . \frac{9.8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5.6} . 45 + 4 . \frac{9.8}{2} . \frac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5} . 21 + 2 . \frac{1}{2} \frac{9.8}{2} \frac{7.6}{2} . \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4} . 3 = \mathbf{105084},$$

$$\frac{\lambda}{A} = \frac{9.8}{2} 3.3 + 2.9 \left[9 . \frac{3.2}{2} + 3.3 \right] = \mathbf{972}, \quad \frac{\nu}{E} = 0,$$

$$\psi = \frac{9.8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5.6} . 720 + \frac{9.8}{2} . \frac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5} . 108 + \frac{1}{2} \frac{9.8}{2} \frac{7.6}{2} . \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4} . 6 = \mathbf{153468},$$

$$\chi = 8 \left(\frac{9.8}{2} . 3 . \frac{7.6.5}{1.2.3} + 2.9 . \frac{3.2}{2} . \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} \right) = \mathbf{60480}.$$

Man kan da danne efterstaaende Tavle, hvor μ' som sædvanlig aflæses nedenfor μ:

System.	α	$\frac{\xi_1}{2}$	$\frac{\lambda}{1092}$	$\frac{\nu}{206640}$	ψ	χ	b	μ
$12P$	450	0	0	0	0	0	9	27
$11PL$	2360	0	0	0	0	0	52	144
$10P\,2L$	12200	0	0	0	0	0	300	760
$9P\,3L$	61920	0	0	0	0	0	1728	3960
$8P\,4L$	306720	0	0	0	0	0	9936	20304
$7P\,5L$	1472160	0	0	0	0	0	56688	101952
$6P\,6L$	6775200	180	0	0	144	0	318000	498336
$5P\,7L$	29543320	3150	0	0	2870	0	1729898	2352720
$4P\,8L$	120117880	24822	54	0	26852	3360	8888960	10632444
$3P\,9L$	447114240	105084	972	0	153468	60480	41976108	45442800
$2P\,10L$	1477274720	216720	6750	16	581280	491400	172056352	181059912
$P\,11L$	4177924640	0	21780	220	1461768	2494800	580054968	653188288
$12L$	9851750640	0	0	1485	2266110	9251550	1563293916	2054961360
								5474784888

70. Systemer $n = 4$, $d = e = 0$. — Ved Bestemmelsen af Karakteristikerne i elementære Systemer af almindelige Kurver af fjerde Orden bruges følgende Formler (se 51).

$$\mu' = 6\mu - 2\xi - 3\eta - 4\zeta - 3\varkappa - 6\lambda - 12\nu - 2\vartheta,$$
$$\alpha = 27\mu - 20\xi - 32\eta - 46\zeta - 24\varkappa - 45\lambda - 72\nu - 14\vartheta.$$

Idet disse give saavel μ som μ', naar man forud kjender α, ξ, $\eta \ldots$, faar man Prøveligninger ved at sætte μ' af et System ligestor med μ i det følgende. Men saasnart λ eller ν ophører at være Nul, hvilket sker for Systemet $4P\,9L$ og de følgende, træffer man i Udtrykkene for disse Tal paa ubekjendte Koefficienter — som vi skulle se, ialt 5 — og til disses Bestemmelse maa man da benytte de 5 sidste Prøveligninger (μ' i System

$5P8L$ lige stor med μ i System $4P9L$ o. s. v.). Ikke desmindre vil man ogsaa faa en Prøve paa de sidste vanskelige Bestemmelser, da Koefficienterne, der findes ved Divisioner med mangecifrede Tal, skulle være hele Tal.

De ubekjendte Koefficienter betegnes paa følgende Maade: ved

H Antallet af Kurver λ, som bestemmes ved Beliggenheden af de to retliniede Grene og af 9 af de enkelte Toppunkter; ved

I Antallet af Kurver λ, som bestemmes ved Beliggenheden af den tredobbelte rette Linie, af de enkelte Toppunkter og af et Punkt af den enkelte retliniede Gren; ved

K Ordenen af det geometriske Sted for et enkelt Toppunkt eller for det dobbelte Toppunkt paa en Kurve λ, hvis tredobbelte Gren drejer sig om et fast Punkt, medens de øvrige af de anførte Punkter bevæge sig paa rette Linier ($K-H$ eller $K-I$, hvis et enkelt Toppunkt eller det dobbelte Toppunkt skal falde i selve det faste Punkt); ved

L Antallet af Kurver ν, som bestemmes ved Beliggenheden af den firdobbelte rette Linie og 11 Toppunkter; ved

M Ordenen af det geometriske Sted for et Toppunkt paa en Kurve ν, naar den rette Linie drejer sig om et fast Punkt, medens de 11 andre Toppunkter gjennemløbe rette Linier ($M-L$, hvis et Toppunkt skal falde i selve det faste Punkt).

Bestemmelsen af α sker ved 68 og 69. Ved Bestemmelsen af ξ, η og ζ kommer Bestemmelsen af ξ_2, η og ζ i 68 os til Gode. Som Exempel kunne vi tage Systemet $2P11L$, hvor man finder

$$\alpha = 653188288 + 2.11.172056352 + 4.\frac{11.10}{2}.6732832 = \mathbf{5919651072},$$

$$\frac{\xi}{2} = \frac{11.10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5.6}.10324 + \frac{11.10}{2}.\frac{9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5}.1160 + \frac{1}{2}\frac{11.10}{2}\frac{9.8}{2}.\frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}.52$$
$$= \mathbf{14610288},$$

$$\eta = \frac{11.10.9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5.6.7}.1100 + \frac{11.10}{2}.\frac{9.8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5.6}.214 + \frac{1}{2}\frac{11.10}{2}\frac{9.8}{2}.\frac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5}.16$$
$$= \mathbf{1684320},$$

$$\zeta = 16.\frac{11.10}{2}\frac{9.8.7..3}{1.2.3..7}.\frac{2.1}{2} + 4.\frac{1}{2}\frac{11.10}{2}\frac{9.8}{2}.\frac{7.6..2}{1.2..6}.1 = \mathbf{59400},$$

$$\varkappa = 4\left(\frac{2.1}{2}.\frac{1}{2}\frac{11.10}{2}\frac{9.8}{2}.\frac{7.6.5}{1.2.3} + 2\,\frac{11.10}{2}.\frac{9.8}{2}.\frac{7.6}{2} + \frac{1}{2}\frac{11.10}{2}\frac{9.8}{2}.7\right.$$
$$+ 3.11\left[\frac{2.1}{2}.\frac{10.9}{2}.\frac{8.7.6}{1.2.3} + 2\left(\frac{10.9}{2}.\frac{8.7}{2} + \frac{10.9}{2}.\frac{8.7.6}{1.2.3}\right) + \frac{10.9}{2}.\frac{8.7}{2}\right]$$
$$\left. + 9.\frac{11.10}{2}.2.\frac{9.8.7}{1.2.3}\right) = \mathbf{2328480},$$

$$\lambda = H\left(\frac{1}{2}\frac{11.10}{2}\frac{9.8}{2} + 2.11\,[3.2.\frac{10.9}{2} + \frac{10.9}{2}] + 4.\frac{11.10}{2}.3.2\right) + I.3.2\frac{11.10}{2}$$
$$+ K.3.2.2.11 + (K-H)\frac{11.10}{2} + (K-I)\,2.11 = \mathbf{9185}\,H + \mathbf{308}\,I + \mathbf{209}\,K,$$
$$\nu = \mathbf{16}\,L,$$
$$\vartheta = \frac{11.10.9..4}{1.2.3..8}.2^8.2^5.4 + \frac{11.10}{2}.\frac{9.8..3}{1.2..7}.2^7.2^4.4 + \frac{1}{2}\frac{11.10}{2}\frac{9.8}{2}.\frac{7..2}{1..6}.2^6.2^3.2$$
$$+ \frac{1}{1.2.3}\frac{11.10}{2}\frac{9.8}{2}\frac{7.6}{2}.\frac{5..1}{1..5}.2^5.2^2.1 = \mathbf{29610240}.$$

Man finder da, at

i Systemet $(13-t)\,PtL$ er for $t < 6$, $\mu = 6^t$, $\mu' = 6^{t+1}$,

og dernæst:

System.	α	$\frac{\xi}{2}$	η	ζ	$\varkappa$	λ	ν	ϑ	μ
$7P6L$	1256352	84	0	0	0	0	0	0	46656
$6P7L$	7453872	2268	144	0	0	0	0	0	279600
$5P8L$	43393596	34930	3944	150	0	0	0	8192	1668096
$4P9L$	242612208	358344	48420	2700	8064	$54H$	0	221184	9840040
$3P10L$	1268876232	2666160	354600	19170	211680	$1125H$ $+27I$ $+9K$	0	3271680	56481396
$2P11L$	5919651072	14610288	1684320	59400	2328480	$9185H$ $+308I$ $+209K$	$16L$	29610240	308389896
$P12L$	23328812592	57943116	5123448	0	15218280	$34320H$ $+1221I$ $+1584K$	$264L$ $+4M$	181098720	1530345504
$13L$	74651593680	154143990	8975538	0	67297230	0	$2067L$ $+78M$	807144624	6533946576 23011191144

$$H = \mathbf{1552},\quad I = \mathbf{3280},\quad K = \mathbf{9400},$$
$$L = \mathbf{451440},\quad M = \mathbf{6}\,L = \mathbf{2708640}.$$

71. Andre elementære Systemer af fjerde Orden. — Paa Vejen til Bestemmelsen af Karakteristikerne i de elementære Systemer af almindelige Kurver af fjerde Orden have vi fundet Bestemmelsen af Karakteristikerne i flere af de andre elementære Systemer af fjerde Orden. Hvad de øvrige angaar, saa giver — som det er bemærket i 62 — det allerede fundne en større Rigdom af Midler til Bestemmelsen af deres Karakteristiker, end der ved de allerede undersøgte Systemer har staaet til vor Raadighed, og derved en større Lethed i Bestemmelsen. Vi skulle anføre et Par Exempler herpaa:

1) Pillen $(2d)$ i Tavlen 63 indeholder ligefrem Karakteristikerne μ og μ' i de Systemer af Kurver af fjerde Orden med et Dobbeltpunkt og med Røring mellem to Grene, som forøvrigt kun ere underkastede elementære Betingelser.

2) 54 indeholder foruden de to Formler, som vi have benyttet i 68 og 69, et Udtryk for Tallet β. Dette giver os for Systemerne $(10-t)\,PtL$ af Kurver med et fast Dobbeltpunkt, $(11-t)\,PtL$ af Kurver med et Dobbeltpunkt paa en given ret Linie og for Systemerne $(12-t)\,PtL$ af Kurver med Dobbeltpunkt de i efterfølgende tre Rækker opførte Værdier af β:

$t =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
fast Dbp.	2	12	72	432	2544	14470	77713	380151	1648568	5834264	15875508		
Dbp. p. r. L.	20	116	672	3888	22128	122160	644074	3157153	14037510	54048596	171350840	433455702	
frit Dbp.	72	392	2120	11376	60480	317280	1632240	8156626	38719660	170010756	654184448	2089211768	5370046722

Den første Række Tal er Antallene af de Kurver af fjerde Orden, der have en Spids i et givet Punkt og forresten ere underkastede elementære Betingelser; de ere da Tallene $[c]$ i de elementære Systemer $n=4$, $d=0$, $e=1$. Et Tal i anden Række er sammensat af Antallet af saadanne Kurver, der have en Spids paa en given ret Linie og forresten ere underkastede Systemets Betingelser, og saadanne, som have en Spids i den rette Linies Skjæringspunkt med en af de t givne Tangenter. Disse sidstes Antal have vi nu allerede fundet, hvorved man kan finde de førstes eller Tallene c i de elementære Systemer $n=4$, $d=0$, $e=1$. Paa lignende Maade vil et Tal i sidste Række være sammensat af Antallet af Kurver med en Spids, som blot ere underkastede elementære Betingelser, og saadanne Tal, som vi nu have fundet, multiplicerede med t og $\frac{t\,(t-1)}{2}$, og vi finde saaledes selve Karakteristikerne i de elementære Systemer $n=4$, $d=0$, $e=1$. Vi finde da, idet vi kalde et vilkaarligt blandt disse Systemer $(11-t)\,PtL$, og aflæse Karakteristiken μ' tilhøjre for μ:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
$[c]$	2	12	72	432	2544	14470	77713	380151	1648568	5834264	15875508		
c	20	114	648	3672	20400	109440	557254	2613162	10996302	39211484	113008200	258825114	
μ	72	372	1890	9396	45360	210960	937440	3951978	15638400	57358602	187884048	525237048	1216361826

3) Systemerne $n=4$, $d=1$, $e=2$. — Karakteristikerne beregnes ved Hjælp af 37 [1] uden Anvendelse af de her i fjerde Afsnit opnaaede Resultater. Man finder de

[1] Se efterstaaende Rettelse.

Resultater, som indeholdes i efterstaaende Tavle, hvor det ses, at de Tal, som høre til et System, maa aflæses i to forskjellige Rækker:

System.	β	$[\beta]'$	γ_1	$[\gamma_1]$	$(2e)$	μ	b	c	$[b]$	$[c]$	(de)	$(d2e)$	
$8P$	1200		2256	492	861	2052	1008	1860	144	240	1395	147	$8L$
$7PL$	2400	600	4692	1056	1722	4716	2484	4656	360	624	2970	618	$P7L$
$6P2L$	4152	984	8232	1908	3012	9360	5256	10104	774	1416	5220	1884	$2P6L$
$5P3L$	5916	1386	11796	2778	4326	15336	9162	17880	1386	2616	7470	4134	$3P5L$
$4P4L$	6684	1554	13368	3162	4908	20052	12690	24960	1980	3792	8460	6684	$4P4L$
$3P5L$	5880	1344	11796	2772	4326	20052	13248	26160	2124	4080	7470	7662	$5P3L$
$2P6L$	4080	900	8232	1896	3012	15336	10404	20616	1710	3264	5220	6348	$6P2L$
$P7L$	2292	474	4692	1038	1722	9360	6426	12864	1089	2046	2970	4074	$7PL$
$8L$	1056	201	2256		861	4716	3177	6630			1395	2109	$8P$
	β'	$[\beta']$	γ_1	$[\gamma_1]'$	$(2e)$	μ'	b'	c'	$[b']'$	$[c']'$	$(d'e')$	$(d'2e')$	System.

Pillerne (de) og $(2\,de)$ indeholde her Karakteristikerne i de elementære Systemer med et Dobbeltpunkt og et Tilbagegangspunkt af anden Art, og i dem med et (uegentligt) tredobbelt Punkt med tre sammenfaldne Grene.

De fundne Resultater tjene endvidere til Bestemmelse af Tallene β i de i 38 omtalte elementære Systemer. Værdierne af β i Tavlen i 63 give endvidere Relationer mellem de Tal μ' og c, som høre til et saadant System, hvorved ogsaa disse Systemers Karakteristiker bestemmes o. s. v.

Rettelser og Tilføjelser.

S. 322 (38) L. 11: en ret Linie, læs Diameteren.

S. 343 (59): I 37 angives, at man for at finde μ, μ', b og b' maa søge β, β' og γ. Da imidlertid $\gamma = \beta + \beta'$, er det nødvendigt tillige at søge $(2e)$.

S. 372 (88): I 55 betegner $[\chi]$ Antallet af de Kurver χ, paa hvilke den Gren, der gaar gjennem begge Dobbeltpunkter, tillige gaar gjennem et af Systemets givne Punkter.

S. 380 (96) L. 11: $9A. \lambda = 0.$, læs $9A, \nu = 0.$

Résumé du Mémoire

intitulé:

Recherche des propriétés générales des sytèmes de courbes planes,

suivie d'une application à la détermination des caractéristiques des systèmes élémentaires du quatrième ordre.

Par M. **H. G. Zeuthen.**

Notations.

Nous donnons ici la liste des notations dont nous avons fait usage dans les deux premières parties de ce mémoire. Les nombres adjoints indiquent les n^{o}s où elles ont été introduites et ceux où l'on trouve une description plus étendue de leur signification. Nous désignons par

n l'ordre d'une courbe du système (1);
d le nombre de ses points doubles (1);
e le nombre de ses points cuspidaux (1);
μ le nombre des courbes qui passent par un point donné (3);
b l'ordre du lieu des points doubles (3);
c l'ordre du lieu des points cuspidaux (3);
p la classe de l'enveloppe des tangentes aux points doubles (3);
q la classe de l'enveloppe des tangentes aux points cuspidaux (3);
u la classe de l'enveloppe des tangentes menées des points doubles (3);
v la classe de l'enveloppe des tangentes menées des points cuspidaux (3);
x la classe de l'enveloppe des droites joignant deux points doubles (3);
y la classe de l'enveloppe des droites joignant un point double à un point cuspidal (3);
z la classe de l'enveloppe des droites joignant deux points cuspidaux (3);
$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$ le nombre des courbes douées d'un nouveau point double (7 et 9);
α_0 étant celui des courbes où aucune des branches qui forment le point double n'est une droite (10—12);
α_1 celui des courbes où une de ces deux branches est une droite (13);
α_2 celui des courbes où toutes les deux branches sont des droites (13);

β le nombre des courbes où un point double est dégénéré en un point cuspidal (7 et 15);

$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1$ le nombre des courbes où un point cuspidal est dégénéré en un point de contact de deux branches (7),

γ_0 étant celui des courbes où aucune de ces branches n'est une droite (16),

γ_1 celui des courbes où l'une des branches est une droite (17);

$(2d)$ le nombre des courbes où deux points doubles coïncident (7, 18 et 19);

(de) le nombre des courbes où un point double coïncide avec un point cuspidal (7, 18 et 20);

$(2e)$ le nombre des courbes où deux points cuspidaux coïncident (7, 18 et 21);

$(3d)$ le nombre des courbes où trois points doubles coïncident (en un point triple; 7 et 22);

$(2de)$ le nombre des courbes où deux points doubles et un point cuspidal coïncident (7 et 22);

$(d2e)$ le nombre des courbes où un point double et deux points cuspidaux coïncident (7, 22 et 23).

En ajoutant des accents aux notations qui précèdent, nous aurons les notations des nombres réciproques qu'on obtient par le principe de dualité. n' est la classe d'une courbe du système, μ' le nombre des courbes tangentes à une droite etc. Les courbes $\gamma_1{}'$ $(2d')$, $(d'e')$, $(2e')$ ne sont pas différentes des courbes γ_1, $(2d)$, (de), $(2e)$ (voir 17 et 18).

Les courbes α, β, γ, etc. sont les courbes dont les nombres ont ces notations, et les courbes (b), (c), (b') ... sont les courbes dont nous désignons l'ordre ou la classe par b, c, b' ...

Nous désignons par $[b]$ et $[c]$ les nombres des courbes qui ont un point double ou cuspidal en un point par lequel les courbes du système doivent passer, et par $[\alpha_1]$, $[\alpha_2]$, $[\beta']$, $[\gamma_1]$ les nombres des courbes α_1, α_2, β', γ_1 dont une branche droite passe par un tel point. En ajoutant ou en enlevant des accents, on aura les notations des nombres réciproques (35 et suivants).

Nous désignons dans les figures par b et c des points doubles ou cuspidaux, ou les courbes lieux de ces points; par b' et c' des tangentes doubles ou d'inflexion, et par (b') et (c') des points de contact avec les enveloppes de ces tangentes singulières; par a et (a') l'enveloppe des courbes du système ou des points de cette enveloppe.

Cette liste sera complétée au commencement du résumé de la troisième partie.

Première partie.

Description des courbes singulières ordinaires sans branches multiples.

1. [1] Systèmes de courbes. — Relations de Plücker et définition d'un système.

2. Représentation analytique d'un système de courbes. — On peut représenter un système par une équation du degré n en coordonnées-point (ou par une équation du degré n' en coordonnées tangentielles) dont les coefficients sont des fonctions algébriques (racines d'équations algébriques) d'un paramètre k. Celui-ci peut toujours être choisi de manière qu'à une courbe du système, qui n'en fait pas partie plusieurs fois, ne corresponde qu'une seule valeur de k; mais à chaque valeur de k correspondront en général plusieurs courbes.

Il sera commode, pour la discussion des courbes voisines d'une courbe donnée du système, de choisir k de manière que cette courbe corresponde à $k = 0$, et de développer le premier membre de l'équation en série suivant les puissances croissantes de k. On peut toujours obtenir par le choix de k que tous les exposants soient entiers. L'équation devient

$$\varphi = \varphi^0 + \varphi^{(1)} k + \varphi^{(2)} k^2 + .. \varphi^{(r-1)} k^{r-1} + \psi k^r = 0, \tag{I}$$

où $\varphi^{(0)} \ldots \varphi^{(r-1)}$ sont des fonctions des coordonnées, ψ une fonction des coordonnées et de k qui ne devient pas infinie pour $k = 0$.

Ayant assujetti k aux différentes conditions que nous avons indiquées, nous pourrons, pour la lim. $k = 0$, mesurer par rapport à k les ordres des infiniment petits, en appelant infiniment petit de l'ordre α une quantité qui devient proportionnelle à k^α. On voit alors que la distance de la courbe $\varphi^{(0)}$ à la courbe voisine φ, déterminée par la lim. $k = 0$, est en général un infiniment petit du premier ordre, et, seulement dans les points de contact avec l'enveloppe du système, un infiniment petit du deuxième ordre.

3. Caractéristiques. — Voir la table des notations. La première caractéristique du système μ, sera le degré en k de l'équation qu'on obtient en rendant l'équation du système en coordonnées-point rationnelle par rapport à k. Si c'est l'équation tangentielle qu'on rend rationnelle, le degré en k sera la seconde caractéristique μ'.

4. Courbes singulières ordinaires; division en deux espèces principales. — Les courbes singulières d'un système sont celles qui ont d'autres points ou tangentes singuliers qu'une courbe quelconque du système. Nous appelons ordinaires les courbes singulières qu'on trouve dans les systèmes élémentaires, c'est-à-dire dans les systèmes dont les conditions données ne sont que des points et des tangentes donnés. Ces

[1] Les n$^{\text{o}}$s sont les mêmes que ceux du texte danois.

singularités seront aussi les seules d'un système de courbes tangentes à des courbes données indépendantes entre elles.

A côté d'une première espèce de courbes singulières qui ont seulement un nouveau point singulier ou une nouvelle tangente singulière, les systèmes élémentaires peuvent aussi contenir des courbes douées de branches multiples. Nous nous occuperons de celles-ci dans la troisième partie du mémoire; *dans les deux premières parties, nous n'attribuerons pas aux systèmes d'autres courbes à branches multiples que les courbes* α et α' (voir la table des notations et 10—14), qui ont seulement des branches multiples lorsqu'on les regarde respectivement comme des enveloppes de droites ou des lieux de points, mais non pas dans les cas inverses.

5. *Branches droites et sommets.* — En appliquant le principe de dualité à une courbe composée dont une branche est une droite, on trouve une courbe composée à laquelle toutes les droites menées par un point sont tangentes. Ce point s'appelle un sommet. Une courbe d'un système, si on la regarde comme lieu de points, peut être composée de branches courbes et de droites, tandis que, considérée comme enveloppe, elle est composée des *mêmes* branches courbes et de sommets. La partie courbe qu'on a dans les deux cas s'appelle *la courbe résidue.* Les formules de Plücker ne sont alors applicables qu'à la courbe résidue.

6. *Lemmes sur des courbes douées de branches droites et de sommets.* — Si l'on suppose que le système ne contient qu'un nombre fini de courbes douées de branches droites ou de sommets — sans quoi on ne pourrait appliquer les formules de Plücker aux courbes complètes du système — on aura le lemme suivant: «Un système ne contient pas des courbes où $n-1$ des d points doubles sont des points d'intersection d'une branche droite simple et d'une courbe résidue», ainsi que le lemme qui y correspond suivant le principe de dualité.

7. *Énumération des courbes singulières ordinaires.* — Voir la table des notations. Nous supposons que les courbes à $\left\{\begin{matrix}\text{gauche}\\ \text{droite}\end{matrix}\right\}$ dans le texte danois n'ont pas d'autres $\left\{\begin{matrix}\text{points}\\ \text{tangentes}\end{matrix}\right\}$ singuliers nouveaux ou transformés, ni d'autres $\left\{\begin{matrix}\text{branches droites}\\ \text{sommets}\end{matrix}\right\}$ que ceux qui leur sont attribués dans les définitions.

8. *Nombres Plückeriens des courbes résidues* α, β, γ, α', β', γ'. — Les définitions des courbes donnent immédiatement, pour les courbes résidues α, β, γ, les nombres n, d et e, et pour les courbes résidues α', β', γ', les nombres n', d' et e'. Les équations de Plücker serviront donc à déterminer les autres nombres Plückeriens (voir la table dans le texte danois).

On s'assure que les courbes dont il s'agit sont des courbes singulières ordinaires — si seulement les nombres d' et e' ou d et e ne sont pas trop petits — en comptant les conditions auxquelles on peut assujettir les courbes α, β et γ, regardées comme lieux de points, et les courbes α', β', γ' regardées comme enveloppes. La table indique quelles seront les valeurs minimum des nombres d', e', d, e qui permettent au système de contenir une des courbes singulières; car aucun des nombres de la table ne peut être négatif et les courbes résidues γ_0 ont au moins deux tangentes doubles (qui coïncident), et les courbes résidues γ_0', deux points doubles.

9. Les courbes α regardées comme enveloppes, et les courbes α' regardées comme lieux de points. — La table du n° 8 montre qu'une courbe complète α regardée comme enveloppe, est composée de la courbe résidue et d'un sommet double, qui se trouve au nouveau point double. Avec chacune des droites menées du nouveau point double et tangentes à la courbe résidue en un autre point, coïncident deux tangentes doubles de la courbe complète, et avec chaque tangente à une branche courbe du point double, trois tangentes d'inflexion.

Le principe de dualité donne les propriétés correspondantes des courbes complètes α'.

10. Etude des courbes α_0. — Pour l'étude des courbes voisines d'une courbe α_0 il est commode d'écrire l'équation du système de la manière suivante [1] (voir le n° 2)

$$xy + \varphi_3 + \varphi_4 + .. + k\psi = 0, \tag{II}$$

où φ_r est une fonction homogène du degré r de x et y. Nous commençons par attribuer à ψ, qui contient aussi k, un terme a indépendant de x, y et k.

On trouve alors, en désignant par O le nouveau point double de α_0, que la distance de O aux points et aux tangentes des deux branches d'une courbe voisine de α_0 qui s'en approchent, devient, en général, proportionnelle à $k^{\frac{1}{2}}$; la distance de O aux deux tangentes doubles qui tendent à coïncider avec une tangente menée de O à la courbe résidue, devient aussi proportionnelle à $k^{\frac{1}{2}}$. On voit ainsi que les points de contact de ces tangentes doubles avec l'enveloppe (b') se trouveront à leurs points de contact avec la courbe résidue. La courbe (p') sera tangente à la courbe résidue aux mêmes points.

Les distances de O cessent d'être proportionnelles à $k^{\frac{1}{2}}$ pour les points des deux branches déterminés par les lim. $\frac{y}{x} = 0$ ou $\frac{x}{y} = 0$, et pour les tangentes en ces points. On trouve que le point de contact d'une des trois tangentes d'inflexion qui ont pour position limite un des axes, $y = 0$, est à une distance de cet axe prop. à $k^{\frac{2}{3}}$ et à une distance de $x = 0$ prop. à $k^{\frac{1}{3}}$, et que la tangente d'inflexion fait avec sa position limite un angle prop. à $k^{\frac{1}{3}}$ (voir les formules (V) du texte danois). Les courbes (c') et (q') passent deux fois par le point O et sont tangentes à α_0.

Dans la figure 1 les courbes 1 et 3 sont des courbes voisines, antérieure et postérieure, de la courbe 2 qui est une courbe α_0. Le dessin, ainsi que la détermination analytique que nous venons de donner, montre qu'une seule des trois tangentes d'inflexion qui ont pour position limite une des deux tangentes au point singulier de α_0 est réelle.

11. Suite de l'étude des courbes α_0. — Nous supposerons ici que ψ ne contient plus aucun terme indépendant de x, y et k. Alors les distances du point O aux deux branches qui s'en approchent deviennent proportionnelles à k. L'enveloppe des courbes du système passera par le point O — ce qui n'avait pas lieu dans le cas discuté au

[1] x et y sont imaginaires si le nouveau point double est un point isolé.

n° 10 — et y aura même un point double, dont les tangentes sont déterminées par l'équation (VII). Le point O sera deux fois point cuspidal de la courbe (q') et deux fois point d'inflexion de la courbe (c'), les tangentes étant dans les deux cas les droites $x = 0$, $y = 0$. — Une tangente menée de O à la courbe résidue devient ici tangente double de la courbe (b').

Les figures 2—5 montrent les différents cas qui se présentent.

Quoique la transition se fasse ici d'une autre manière que dans le n° 10, on n'a pas besoin d'une nouvelle notation pour désigner le nombre des courbes singulières qu'on rencontre ici. Il faut seulement, dans les formules que nous exposerons dans la deuxième partie de ce mémoire, compter chacune de ces courbes pour deux dans le nombre α_0.

12. Courbes α_0 dans les systèmes élémentaires. — Si les conditions d'un système sont des contacts avec des courbes données [1], indépendantes entre elles, une courbe ayant un nouveau point double qui ne se trouve sur aucune des courbes données, pourra être représentée de la manière indiquée au n° 10 et comptera pour un dans le nombre α_0. Mais une courbe qui, au lieu d'un contact avec une ou deux des courbes données, a un nouveau point double sur la courbe donnée ou en un point d'intersection des deux courbes, doit être représentée de la manière indiquée en 11, parce que l'enveloppe du système passe par le nouveau point double. Dans le dernier cas, où toutes les deux branches de l'enveloppe du système qui passent par le point sont connues, on trouve que la courbe singulière fait deux fois partie du système. Suivant la règle indiquée à la fin du n° 11, on doit donc compter les deux espèces de courbes dont il s'agit ici respectivement pour deux et pour quatre, dans le nombre α_0.

Les systèmes élémentaires sont des cas particuliers des systèmes dont nous avons parlé ici.

13. Courbes α_1 et α_2. — La plupart des résultats trouvés pour les courbes α_0 s'appliquent aussi aux courbes α_1 et α_2. Seulement les branches droites de ces courbes ne sont pas des positions limites de tangentes d'inflexion. — La branche droite d'une courbe α_1, ou une des branches droites d'une courbe α_2, rencontre la courbe consécutive dans les $n-2$ de ses points d'intersection avec la courbe résidue qui ne sont que des positions particulières de points doubles du système, et en deux autres points, qui sont des points de contact avec l'enveloppe du système. Dans le cas où l'enveloppe passe par le nouveau point double O (ce qu'elle fera alors deux fois, voir 11), un des points d'intersection de la courbe singulière avec la courbe consécutive coïncide avec O. Alors deux cas peuvent se présenter: la branche droite n'a qu'un seul contact avec l'enveloppe, ou elle est une branche de l'enveloppe. On rencontre ces deux cas dans les systèmes élémentaires.

Dans la figure 6 la courbe 2 est une courbe α_1.

14. Courbes α'. — En appliquant le principe de dualité aux résultats trouvés dans les n°s 10—13, on trouve les propriétés des courbes α'.

---

[1] En parlant des conditions du système, nous n'y comprenons pas les nombres Plückeriens que nous supposons qu'on a attribués à ses courbes avant d'introduire d'autres conditions.

Dans la figure 7 la courbe 2 est une courbe α_1'. La figure montre clairement que le sommet a_2 est un point double de l'enveloppe du système.

15. Courbes β et β'. — Regardée comme enveloppe de tangentes, une courbe β est composée de la courbe résidue et d'un sommet simple, qui se trouve au nouveau point cuspidal (voir la table du n° 8). — Les $n'-4$ droites, passant par ce point, qui sont tangentes en d'autres points à la courbe résidue, sont des tangentes doubles de la courbe complète β, et deux des tangentes d'inflexion de celle-ci coïncident avec la tangente au point cuspidal.

Pour représenter les courbes voisines d'une courbe β, il est commode de se servir de coordonnées mobiles, dont l'origine est le point double qui tend à être cuspidal, et dont les axes restent parallèles à des directions fixes, $y = 0$ à celle de la tangente au nouveau point cuspidal de la courbe β. L'équation devient alors

$$y^2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \ldots + k(\psi_2 + \psi_3 + \ldots) = 0. \tag{IX}$$

Si l'on veut substituer à ce système de coordonnées mobiles un système fixe, on doit remplacer x et y par $x + a_1 k + a_2 k^2 + \ldots$ et $y + b_1 k + b_2 k^2 + \ldots$, où les coefficients constants a et b sont en général finis (comp. n° 2).

On trouve que la distance du point singulier O de la courbe β à une courbe voisine devient pour la lim. $k = 0$ proportionnelle à k, et qu'une seule branche de l'enveloppe du système passe par ce point. Les tangentes au point double de cette courbe voisine qui tend à devenir cuspidal, ainsi que les tangentes d'inflexion qui tendent à coïncider, font entre elles et avec leurs positions limites des angles prop. à $k^{\frac{1}{2}}$. La droite $y = 0$ sera donc une tangente simple des courbes (p) et (c') au point O. Les deux points d'inflexion seront à des distances de O prop. à k, mais la distance de l'un à l'autre sera prop. à $k^{\frac{3}{2}}$. Le point O sera donc un point cuspidal de la courbe (q').

Le principe de dualité donne les propriétés des courbes voisines d'une courbe β'.

Les figures 8 et 9 montrent le passage par une courbe β ou β'.

16. Courbes γ_0 et γ_0'. — Regardée comme enveloppe de tangentes, une courbe γ_0 est composée de la courbe résidue et d'un sommet qui se trouve au nouveau point singulier. Les $n'-5$ tangentes menées de ce point à la courbe résidue sont des tangentes doubles de la courbe complète; mais la courbe résidue, en même temps qu'elle a perdu ces tangentes doubles, en a obtenu deux nouvelles qui coïncident avec la tangente au point de contact de deux branches. Avec la même tangente coïncident quatre tangentes d'inflexion de la courbe complète (voir le n° 8).

Nous faisons usage d'un système de coordonnées mobiles, en prenant pour origine le point cuspidal qui tend à être point de contact de deux branches, et pour axe $y = 0$ la tangente en ce point cuspidal; l'autre axe reste parallèle à une direction fixe. La distance du point singulier O de la courbe γ_0 à une courbe voisine devient en général prop. à k, et l'enveloppe du système passe par O. Aussi les quatre tangentes d'inflexion qui ont la tangente en O pour position limite, font-elles des angles prop. à k avec cette droite fixe et l'un avec l'autre, et de même les distances de leurs points de contact (entre eux et de O) sont prop. à k. La tangente de la courbe γ_0 en son point singulier O est donc une tangente quadruple de la courbe (c'), et le point O est un point quadruple de la courbe (q').

Le principe de dualité donne les propriétés des courbes voisines d'une courbe γ_0'.

Les figures 10, 11 et 12 montrent les trois différents modes de passage par une courbe γ_0. Dans tous les trois cas deux des quatre tangentes d'inflexion qui tendent à coïncider sont réelles, deux imaginaires. A ces figures correspondent respectivement les figures 13, 14, 15 qui montrent le passage par une courbe γ_0'.

17. Courbes γ_1. — Le nouveau point singulier d'une courbe γ est en même temps un des e points cuspidaux et un sommet, et la tangente singulière d'une courbe γ' est en même temps une des e' tangentes d'inflexion et une branche droite. Or la table du n° 8 montre qu'une seule tangente d'inflexion d'une courbe γ_1 coïncide avec sa branche droite. On voit donc que les courbes γ_1 et γ_1' ne sont pas différentes entre elles.

La représentation analytique d'une courbe γ_1 se fait de la même manière que celle des courbes γ_0 ou γ_0', et les ordres des différentes distances ou angles infiniment petits sont les mêmes.

La fig. 16 montre le passage par une courbe γ_1. Cette figure est elle-même une figure de transition de 10 à 11 ou de 13 à 14.

18. Courbes $(2d)$, (de) et $(2e)$. — Une courbe $(2d)$ a, au point où deux points doubles coïncident, un contact de deux branches. Selon le lemme du n° 6 aucune de ces branches n'est droite. Par conséquent deux tangentes doubles coïncident avec la tangente de contact. La courbe $(2d)$ sera donc aussi une courbe $(2d')$, et réciproquement.

Le nouveau point singulier d'une courbe (de) est un point de rebroussement de seconde espèce dont la tangente est à la fois tangente double et tangente d'inflexion. Aussi les courbes (de) et les courbes $(d'e')$ sont les mêmes.

Si deux points cuspidaux coïncident sans que d'autres points singuliers s'y joignent, il en résulte un contact triponctuel (osculation) de deux branches. Si une de ces branches était droite on aurait une courbe β'; mais dans le n° 7 nous avons expressément exclu ce cas. Les formules de Plücker permettent de substituer à deux points cuspidaux trois points doubles si, en même temps, on substitue à deux tangentes d'inflexion trois tangentes doubles. On verra ainsi que les courbes $(2e)$ sont en même temps des courbes $(2e')$, et réciproquement.

19. Représentation analytique des courbes $(2d)$. — Nous faisons usage de coordonnées mobiles: l'axe $y=0$ est la droite joignant les deux points doubles qui tendent à coïncider, l'axe $x=0$ est une droite fixe passant par le nouveau point singulier de la courbe $(2d)$. Soit en faisant usage de ces coordonnées (voir le texte danois), soit en observant que les distances des deux branches d'une courbe voisine de $(2d)$ qui tendent à se toucher, sont, pour la lim. $k=0$, proportionnelles à k, on trouve que les deux points doubles qui tendent à coincider et les tangentes en ces points, ainsi que les deux tangentes doubles qui tendent à coincider et leurs points de contact, s'éloignent, en général, de distances ou d'angles proportionnels à $k^{\frac{1}{2}}$ de leurs positions limites. On voit donc qu'une branche des courbes (b) et (b') et deux branches des courbes (p) et (p') sont tangentes à la courbe $(2d)$ en son nouveau point singulier. — Les conditions du système peuvent amener le cas moins général où ces distances et ces angles ne sont que proportionnels à k. Alors la courbe singulière compte pour deux dans le nombre $(2d)$ [voir le n° 66 et comparer au n° 11].

La fig. 17 montre le passage par une courbe $(2d)$.

20. Représentation analytique des courbes (de). — Si l'on commence par faire usage des mêmes coordonnées que dans le n° 19, il sera commode de remplacer $y+\frac{a}{2}x^2$ par la seule notation y, ou bien d'introduire un système mobile de coordonnées curvilignes. On peut, pour le définir, le rapporter à un système fixe où $x=0$ est une droite arbitraire passant par le nouveau point singulier de la courbe (de), et où $y=0$ est une parabole dont les diamètres sont parallèles à $x=0$, et qui est osculatrice à (de) au dit point singulier. Dans le système mobile, $x=0$ reste fixe; mais $y=0$ est la parabole représentée, dans le système fixe, par une équation linéaire, et passant par les deux points singuliers qui tendent à coïncider. Soit dans le système fixe, soit dans le système mobile, les coordonnées d'un point sont — à des facteurs constants près — sa distance de la droite $x=0$, et sa distance de la parabole $y=0$ mesurée sur un diamètre.

On trouve au moyen de ces coordonnées que les distances des points singuliers d'une courbe voisine d'une courbe (de) à leurs positions limites sont prop. à k. Les tangentes au point double font aussi avec leur position limite des angles prop. à k, mais l'une avec l'autre un angle prop. à $k^{\frac{3}{2}}$, et la tangente au point cuspidal fait avec sa position limite un angle prop. à k. Le principe de dualité donne les propriétés analogues des tangentes singulières qui tendent à coïncider. — Le nouveau point singulier de la courbe (de) est un point simple des courbes (b), (c) et (q'), et un point cuspidal de (p'); la nouvelle tangente singulière de (de) est tangente simple de (b'), (c') et (q), et tangente d'inflexion de (p).

La fig. 18 montre le passage par une courbe (de).

21. Représentation analytique d'une courbe $(2e)$. — On trouve, en faisant usage des mêmes coordonnées mobiles et curvilignes que dans le n° 20, que, sur une courbe voisine de $(2e)$, les deux points cuspidaux et leurs tangentes, ainsi que les deux tangentes d'inflexion et leurs points de contact, s'éloignent de quantités proportionnelles à $k^{\frac{1}{2}}$ de leurs positions limites. Les courbes (c), (c'), (q) et (q') sont tangentes à la courbe $(2e)$ en son point singulier.

Les fig. 19 et 20 montrent deux formes de courbes $(2e)$ et le passage par ces courbes.

22. Courbes $(3d)$, $(2de)$, $(d2e)$, $(3d')$, $(2d'e')$, $(d'2e')$. — Une courbe $(3d')$ est une courbe du système dont une tangente double présente un troisième contact, et devient ainsi une tangente triple. — Une courbe $(2d'e')$ est une courbe où l'un des contacts d'une tangente double devient triponctuel. Une courbe $(d'2e')$ est une courbe où les deux points de contact d'une tangente double coïncident. On voit ainsi que ces courbes singulières sont ordinaires; suivant le principe de dualité, les courbes $(3d)$, $2de)$, $d2e)$ le seront aussi.

On déduit sans difficulté des propriétés connues des points doubles et cuspidaux celles des courbes voisines d'une courbe $(3d)$ ou $(2de)$. Le nouveau point singulier d'une courbe $(3d)$ est un point triple de la courbe (b), et celui d'une courbe $(2de)$ est un point cuspidal de la courbe (b) et un point simple de la courbe (c).

Pour les courbes $(3d')$ et $(2d'e')$ nous renvoyons au principe de dualité.

23. Représentation analytique des courbes $(d2e)$ et $(d'2e')$. — Pour représenter les courbes voisines d'une courbe $(d'2e')$, nous avons fait usage d'un système de coordonnées mobiles: l'axe $y = 0$ est la tangente double dont les points de contact tendent à coïncider, et l'axe $x = 0$ est une droite fixe menée par le point de la courbe $(d'2e')$ où cette coïncidence a lieu. — On trouve qu'en général la tangente double et les deux tangentes d'inflexion qui tendent à coïncider, s'éloignent (pour la lim. $k = 0$) de quantités prop. à k de leur position limite, mais qu'elles font entre elles des angles prop. à $k^{\frac{3}{2}}$; que les points de contact de ces tangentes sont à des distances prop. à $k^{\frac{1}{2}}$ de leur position limite; que la tangente menée d'un point de la tangente double (ou de l'une des tangentes d'inflexion) et qui tend à coïncider avec cette tangente singulière, fait avec elle un angle proportionnel à k^2.

Les courbes (p') et (q') sont tangentes à la courbe $(d'2e')$ en son point de contact avec la nouvelle tangente singulière, et cette tangente est en un autre de ses points à la fois tangente simple de la courbe (b'), et tangente d'inflexion de la courbe (c'). (Voir la fig. 21).

On trouve au moyen du principe de dualité les propriétés des courbes voisines d'une courbe $(d2e)$ (voir la fig. 22).

Deuxième partie.

Relations entre les caractéristiques et les nombres des courbes singulières ordinaires.

24. Exposé des résultats principaux. — Dans les équations exposées dans cette partie, nous n'avons pas égard à d'autres courbes pourvues de branches multiples que les courbes α et α'. Elles sont donc immédiatement applicables aux nombreux systèmes où il n'y en a pas d'autres, et, en ajoutant des termes supplémentaires, on peut aussi les appliquer à des systèmes qui renferment d'autres courbes à branches multiples (et même à des systèmes où il y a des courbes singulières extraordinaires). Pour peu qu'on connaisse les propriétés de ces courbes singulières et de leurs courbes voisines, on peut trouver les termes supplémentaires d'une formule par les mêmes procédés que la formule elle-même (voir 40 et troisième partie du mémoire).

Les 24 équations énumérées dans le texte danois ne font que 23 équations indépendantes entre elles. Il est donc possible de trouver les 40 nombres μ, μ' etc., lorsqu'on en connaît 17 (ainsi que les nombres Plückeriens, qui font partie de la définition du système).

25. Principe de correspondance. — Les formules du n° 24 sont trouvées au moyen du principe de correspondance:

Lorsqu'on a une droite (L) et deux séries de points X et Y tels, qu'à un point X correspondent η points Y, et, à un point Y, ξ points X, et que cette correspondance peut s'exprimer algébriquement, le nombre des points (XY) où un point X coïncide avec un des points correspondants Y est $\xi + \eta$. — Les points d'une droite peuvent, dans cet énoncé, être remplacés par les droites d'un faisceau.

26. Solutions coïncidentes. — Il est connu que l'application du principe de correspondance présente une seule difficulté: celle de déterminer le nombre de points (XY) qui coïncident en un point où X coïncide avec un ou plusieurs des points correspondants Y. Pour résoudre cette difficulté, je fais usage de la règle suivante:

Si le point X et un des points correspondants Y coïncident à la fois avec un point fixe D, et si, en même temps que la distance DX devient infiniment petite, la distance XY devient proportionnelle à $(DX)^{\zeta}$, ce point Y amène la coïncidence de ζ des $\xi + \eta$ points (XY) avec D. En faisant passer le point mobile X par le point fixe D, et en considérant ainsi séparément tous les points correspondants Y qui passent en D en même temps que X, on trouve tous les points (XY) qui coïncident avec D.

Ayant trouvé, dans la première partie de ce mémoire, les ordres des distances et des angles infiniment petits qui séparent les points et les tangentes des courbes singulières de ceux de leurs courbes voisines, nous pouvons faire usage de cette règle pour déterminer directement les coefficients des formules obtenues par le principe de correspondance. C'est de cette démonstration que j'ai fait usage dans mon mémoire; mais dans ma première déduction des formules, j'ai déterminé indirectement beaucoup de ces coefficients, en cherchant une même formule par différentes voies (voir 31), ou en me servant de différentes formules pour trouver un même résultat numérique. La recherche des caractéristiques des systèmes élémentaires permet beaucoup de ces dernières vérifications. Les coefficients trouvés par ces voies indirectes pourraient servir comme démonstration des propriétés des courbes dont on fait usage dans la déduction directe.

27. Déduction des formules (3) et (3'). — On trouve la formule (3) en prenant pour points X et Y deux des points où une même courbe du système rencontre une droite fixe. — Le principe de dualité donne la formule (3').

28. Déduction des formules (4)—(8) et (4')—(8'). — On trouve la formule (4) en prenant pour X la droite joignant un point fixe à un point double d'une courbe du système, et pour Y une des tangentes de la même courbe qui passent par le même point fixe. Les démonstrations de (5)—(8) sont analogues, et le principe de dualité donne (4')—(8').

29. Lemmes pour la déduction des équations (9)—(14) et (9')—(14'). — Le lieu des points de contact des courbes du système avec les tangentes menées d'un point fixe, est de l'ordre $\mu + \mu'$.

Le lieu des n—2 points d'intersection d'une courbe du système avec une tangente menée d'un point fixe, est de l'ordre $(n'-2)\mu + (n-2)\mu'$.

Le lieu des $(n-2)$ points où une droite joignant un point fixe à un point double d'une courbe du système rencontre encore la courbe, est de l'ordre $d\mu + (n-2)b$.

Le lieu des $n-2$ points où la droite joignant un point fixe à un point cuspidal d'une courbe du système rencontre encore la courbe, est de l'ordre $e\mu + (n-2)c$.

On trouve ces ordres en comptant les points d'intersection des lieux avec une droite menée par le point fixe. En appliquant le principe de dualité aux deux premiers lemmes, on ne trouve que de nouveaux exposés des mêmes lemmes.

30. Déduction des équations (9)—(14) et (9′)—(14′). — Le premier membre de l'équation (9) indique le nombre des tangentes menées d'un point fixe aux courbes du système dont un point d'intersection coïncide avec le point de contact. On trouve ce nombre au moyen du principe de correspondance en prenant pour X et Y les droites joignant un autre point fixe au point de contact et à un des points d'intersection d'une des tangentes. — La déduction de (10)—(14) est analogue à celle de (9).

31. Déduction directe d'équations qui peuvent remplacer quelques unes des équations du nº 24. — On trouve l'équation (15) en cherchant le nombre des points doubles des courbes du système dont les deux tangentes rencontrent une droite fixe en un même point. — Le nombre appelé s dans le texte danois est l'ordre du lieu des points où les tangentes à une courbe du système, en ses points d'intersection avec une droite fixe, rencontrent encore la même courbe. En déterminant s, et au moyen du principe de correspondance, et en comptant les points d'intersection du dit lieu avec la droite fixe donnée, on trouve l'équation (16).

32. Équations transformées. — Démonstration que les 24 équations du nº 24 et les 4 équations du nº 31 ne font qu'un système de 23 équations indépendantes entre elles.

33. Courbes d'un système qui satisfont à une condition donnée. — Le principe de correspondance sert à déterminer le nombre des courbes d'un système qui satisfont à une condition donnée. Si cette condition est indépendante de celles qui déterminent le système, on trouve ce nombre en fonction linéaire et homogène des nombres μ, μ', etc. ou, suivant les équations du nº 24, de 17 d'entre ces 40 nombres. Les nombres trouvés peuvent indiquer les ordres ou les classes de courbes fixes qui ont des rapports avec le système.

Nous rappellerons ici les nombreux résultats trouvés par M. Chasles pour les systèmes de coniques. Dans ces systèmes μ, μ', α_2 et α_2' sont les seuls des 40 nombres qui ne soient pas nuls; les équations (3) et (3′) donnent $\alpha_2' = 2\mu - \mu'$, $\alpha_2 = 2\mu' - \mu$; les nombres cherchés ne dépendront donc que de μ et μ'.

Nous rappellerons encore ce théorème de M. Chasles qu'il y a dans un système d'ordre quelconque $n_1'\mu + n_1\mu'$ courbes tangentes à une courbe donnée de l'ordre n_1 et de la classe n_1' (1). Les autres nombres dans le texte danois sont les suivants:

(1) Ma démonstration de ce théorème dans les «Mathematische Annalen» 3me vol. p. 153, montre qu'il est applicable aux cas où la courbe fixe ou les courbes du système ont des points singuliers, bien que je n'y fasse pas expressément la dernière de ces suppositions.

l'ordre du lieu des points où une tangente en un point double d'une courbe du système rencontre encore la courbe (22);

l'ordre du lieu des points où la tangente en un point cuspidal d'une courbe du système rencontre encore la courbe (23);

l'ordre du lieu des points où la droite joignant deux points doubles d'une courbe du système rencontre encore la courbe (24);

l'ordre du lieu des points où la droite joignant un point double d'une courbe du système à un de ses points cuspidaux rencontre encore la courbe (25);

l'ordre du lieu des points où la droite joignant deux points cuspidaux d'une courbe du système rencontre encore la courbe (26).

Les deux premiers de ces nombres deviennent nuls pour $n = 3$, les trois derniers pour $n = 4$. Les équations qu'on trouve ainsi, peuvent se déduire de celles du nº 24, si l'on observe que, dans ces cas, aussi plusieurs des 40 nombres deviennent nuls à cause de leur signification. Mais il en existe une autre application: dans les mêmes systèmes où l'on trouve ainsi des équations, on peut déterminer les nombres $[b]$ et $[c]$ des courbes dont un point double ou cuspidal est situé en un point donné P, par lequel les courbes du système doivent passer. En effet, pour ces systèmes, les nombres p, q, x, y, z seront composés des nombres des courbes ayant des branches droites passant par P et des nombres $[b]$ et $[c]$, tous ces termes étant multipliés par certains coefficients, et ces différents coefficients seront les mêmes qui, dans les expressions (22)—(26), appartiennent aux termes correspondants (voir 35—39).

34. Application aux systèmes où $d = e = 0$. — Tant que le nombre des points donnés est $> \frac{n^2 - n + 2}{2}$, ces systèmes ne contiendront pas d'autres courbes à branches multiples que les courbes α. On peut donc y appliquer les formules du nº 24 jusqu'à cette limite.

35. Systèmes $n = 3$, $d = 0$, $e = 1$. — Les systèmes de courbes du 3me ordre (cubiques) ayant un point singulier, et les systèmes de courbes du 4me ordre (quartiques) présentant trois points singuliers, ne contiennent pas ordinairement d'autres courbes à branches multiples que des courbes α ou α'. On en profite dans les nos 35—39.

36. Systèmes $n = 3$, $d = 1$, $e = 0$.

37. Systèmes $n = 4$, $d = 1$, $e = 2$.

38. Systèmes $n = 4$, $d = 2$, $e = 1$.

39. Systèmes $n = 4$, $d = 3$, $e = 0$. — Tant qu'un des systèmes dont nous parlons dans les nºs 35, 36, 37, 38, 39 ne contient que des courbes singulières ordinaires, on peut exprimer le nombre des courbes du système qui satisfont à une condition nouvelle par 2, 2, 4, 5, 3 nombres caractéristiques (μ, μ', b...; voir le nº 33).

40. Projections d'une série de sections planes d'une surface algébrique. — Les projections des sections d'une surface algébrique faites par les plans d'un faisceau forment un système où il se trouve une droite n-tuple. Les quantités dont les points et les tangentes d'une courbe voisine de cette courbe singulière s'éloignent de ses propres points et tangentes sont proportionnelles à k, si k est l'angle infiniment petit des plans du faisceau qui correspondent à ces deux courbes. On a donc ici un exemple d'un cas où il est facile de déterminer les termes supplémentaires des formules du nº 24, dus à une courbe multiple du système (voir le nº 24). On trouve ainsi la plupart des formules de Salmon et Cayley exprimant les relations entre les nombres des singularités d'une surface. Les notations indiquées en parenthèses sont celles par lesquelles j'ai désigné ces nombres dans un mémoire publié dans les «*Mathematische Annalen*» vol. 4 p. 1.

Troisième partie.

Courbes à branches multiples, notamment celles qu'on trouve dans les systèmes de courbes du troisième et du quatrième ordre.

Notations.

Dans les formules numériques de la troisième et de la quatrième partie, j'emploie, à côté des notations indiquées au commencement de la première partie, les suivantes, qui ont toutes rapport à des systèmes de quartiques, λ et ξ s'appliquant en même temps à des systèmes de cubiques.

ξ est le nombre des courbes douées d'une branche droite double de la deuxième espèce (42);

η celui des courbes douées d'une branche droite double de la troisième espèce (44);

ζ celui des courbes douées d'une branche droite double de la quatrième espèce (45);

$\varkappa$ celui des courbes composées de deux branches doubles de la première et de la deuxième espèce (46);

λ celui des courbes douées d'une branche droite triple (47);

ν celui des droites quadruples (47);

ϑ celui des coniques doubles (48);

ψ celui des courbes composées d'une conique et d'une droite double qui y est tangente, et ayant un point double au point de contact (52);

χ celui des courbes composées de deux droites doubles de la deuxième espèce, et ayant un point double au point d'intersection (53).

Dans les figures, nous désignons par a un sommet simple.

Dans les formules analytiques qui représentent des courbes douées d'une droite multiple, nous prenons celle-ci pour axe $y = 0$, et désignons par A, B, C ... des fonctions de x et y, par a, b, c .. les fonctions de x qui en résultent pour $y = 0$, par ψ une fonction de x, y et k qui ne devient pas infinie pour $k = 0$. Les nombres ajoutés (A_4, b_3 ..) indiquent les degrés des expressions non homogènes A, B .. et a, b, ... (Dans le nº 43 d'autres notations s'y joignent).

41. Courbes douées d'une branche droite double de la première espèce. — La courbe correspondant à $k = 0$ dans le système représenté par

$$A_{n-2}\,y^2 + B_n\,k + \psi k^2 = 0 \tag{I}$$

aura, en général, la droite $y = 0$ pour branche double, les $n-2$ points d'intersection de celle-ci avec la courbe résidue $A_{n-2} = 0$ pour sommets triples, et les n points déterminés par $b_n = 0$ pour sommets simples. Les distances de la branche double aux branches de la courbe voisine qui tendent à coïncider, seront proportionnelles à $k^{\frac{1}{2}}$. Seulement celles des sommets triples seront prop. à $k^{\frac{1}{3}}$ (voir la fig. 23).

Ces courbes ne sont pas des courbes singulières ordinaires d'un système de courbes sans points singuliers dont l'ordre est > 2. Les courbes α' (qui demandent un certain nombre de points singuliers, voir 8) en sont des cas particuliers.

42. Courbes douées d'une branche droite double de la deuxième espèce. — Si dans l'équation (I) y est facteur de B_n, on aura une équation de la forme

$$A_{n-2}\,y^2 + 2\,B_{n-1}\,y\,k + C_n\,k^2 + \psi\,k^3 = 0. \tag{II}$$

La courbe $k = 0$ aura alors des sommets doubles aux points d'intersection de la droite double $y = 0$ avec la courbe résidue $A_{n-2} = 0$, et $2(n-1)$ sommets simples déterminés par

$$b_{n-1}^2 - a_{n-2}\,c_n = 0. \tag{IV}$$

La distance de la branche double aux branches de la courbe voisine qui tendent à coïncider, devient prop. à k. Seulement les distances d'un sommet double aux deux branches qui tendent à le former — mais non pas à une troisième branche qui tend à y passer — seront prop. à $k^{\frac{1}{2}}$, ces branches ayant les mêmes propriétés que celles d'une courbe voisine d'une courbe α_1 ou α_2.

Ces courbes sont des courbes singulières ordinaires d'un système de courbes sans points singuliers.

Les fig. 24 et 25 représentent, pour un système de quartiques, deux différentes manières dont une courbe variable du système peut passer par une de ces formes limites. On trouverait de même 2^{n-3} formes de passage si les courbes étaient de l'ordre n.

43. Différentes représentations des courbes douées d'une branche double de la première et de la deuxième espèce. — La discussion du nº 42 n'est plus applicable au cas où l'équation (IV) est identique. Une des manières (et si $n = 2$ ou $= 3$, la seule) dont cela peut arriver est si $b_{n-1} = a_{n-2}\,b_1$; $c_n = a_{n-2}\,b_1{}^2$. La discussion de l'équation qu'on obtient alors (VII) est analogue à celle du nº 41, à moins que l'équation qui détermine les sommets simples ne soit identique. Alors la discussion (de l'équation (IX)) devient analogue à celle du nº 42, à moins que $b_{n-1}{}^2 - a_{n-2}\,c_n$ ne soit identiquement $= 0$. Si cette identité a lieu de la même manière que dans le cas précédent, on revient à une discussion analogue à celle du nº 41, et ainsi de suite. On rencontre ainsi les deux formes d'équations suivantes:

$$A^{(r)}_{n-2}\,y^{(r)2} + 2\,B^{(r)}_{n-1}\,y^{(r)}\,k^{r+1} + C^{(r)}_{n}\,k^{2r+1} = 0, \tag{XII}$$

$$A^{(r)}_{n-2}\,y^{(r)2} + 2\,B^{(r)}_{n-1}\,y^{(r)}\,k^{r+1} + C^{(r)}_{n}\,k^{2r+2} = 0, \tag{XIII}$$

où

$$y^{(r)} = y + b_1\,k + b'_1\,k^2 + \dots\, b_1{}^{(r-1)}\,k^r = 0, \tag{XIV}$$

et où $A^{(r)}$, $B^{(r)}$, $C^{(r)}$ sont des fonctions de x, $y^{(r)}$ et k qui ne sont pas divisibles par k; b_1, b_1'... sont des fonctions de x. La courbe $k=0$, dans le système (XII), a les mêmes branches et sommets que la courbe singulière du système du n° 41, et la courbe $k=0$, dans le système (XIII), les mêmes que la courbe singulière discutée dans le n° 42. Seulement les ordres des distances infiniment petites aux courbes voisines sont altérées. Nous disons que les équations (XII) et (XIII) sont de nouvelles représentations des courbes douées d'une branche droite double, respectivement de la première et de la deuxième espèce. Dans des cas particuliers, l'équation (XIII), ainsi que l'équation (II), peut aussi représenter des courbes de la première espèce.

Quant à l'usage de ces différentes représentations, nous nous bornerons aux exemples suivants:

Une courbe de la première espèce sera, en général, représentée par une équation renfermée dans la forme (II), si la droite double est tangente à l'enveloppe du système (passe par un point donné du système), et par l'équation (VII) [équation (XII) où $r=1$], si l'enveloppe passe par un sommet triple [voir les équations (XV) et (XVI)]. Une courbe de la deuxième espèce sera représentée par l'équation (IX) [équation (XIII) où $r=1$], si l'enveloppe passe par un sommet double [comparer aux n°s 11—13].

Il faut compter une courbe représentée par l'équation (XIII) $r+1$ fois dans le nombre ξ.

44. Quartiques douées d'une branche droite double de la troisième espèce. — Si $n=4$, l'équation (IV) peut devenir identique d'une seule manière différente de celle que nous avons supposée dans le n° 43; c'est pour $a_2=a_1{}^2$, $b_3=a_1 b_2$, $c_4=b_2{}^2$. Alors l'équation du système devient:

$$(a_1 y + b_2 k)^2 + C_1 y^3 + C_2 y^2 k + C_3 y k^2 + C_4 k^3 + \psi . k^4 = 0. \qquad \text{(XVIII)}$$

La courbe $k=0$ sera composée d'une conique et d'une droite double qui y est tangente. Le point de contact sera un sommet triple, et la droite double aura 7 sommets simples déterminés par l'équation

$$b_2{}^3 c_1 - a_1 b_2{}^2 c_2 + a_1{}^2 b_2 c_3 - a_1{}^3 c_4 = 0. \qquad \text{(XIX)}$$

Les branches d'une courbe voisine qui tendent à coïncider seront à des distances prop. à k de leur position limite, mais à des distances prop. à $k^{\frac{3}{2}}$ de l'hyperbole $a_1 y + b_2 k = 0$; les branches qui tendent à former le sommet triple seront à des distances de celui-ci prop. à $k^{\frac{1}{3}}$. — Les tangentes doubles qui coïncident avec la droite double auront pour points de contact les sommets simples, et, des 24 points d'inflexion, trois coïncident dans chacun des sommets simples et dans le sommet triple (voir la fig. 26).

Les courbes dont il s'agit sont des courbes singulières ordinaires d'un système de quartiques générales.

45. Quartiques douées d'une branche droite double de la quatrième espèce. — Si l'équation (XIX) devient identique, l'équation du système devient

$$(a_1 y + b_2 k)^2 + 2(c_0 y^2 + c_1 y k + c_2 k^2)(a_1 y + b_2 k) + d_0 y^4 + D_1 y^3 k + D_2 y^2 k^2$$
$$+ D_3 y k^3 + D_4 k^4 + \psi k^5 = 0. \qquad \text{(XX)}$$

La courbe $k = 0$ sera composée de deux droites simples et d'une droite double, qui passe par leur point d'intersection. Ce point sera un sommet quadruple, et la droite double possède encore 8 sommets simples déterminés par

$$(b_2{}^2 c_0 - a_1 b_2 c_1 + a_1{}^2 c_2)^2 - (b_2{}^4 d_0 - a_1 b_2{}^3 d_1 + a_1{}^2 b_2{}^2 d_2 - a_1{}^3 b_2 d_3 + a_1{}^4 d_4) = 0. \text{ (XXI)}$$

Les branches d'une courbe voisine qui tendent à coïncider seront à des distances prop. à k de leur position limite, mais à des distances prop. à k^2 de l'hyperbole $a_1 y + b_2 k = 0$. Le sommet quadruple est composé de deux sommets doubles semblables à ceux des courbes α_2, et ses distances à la courbe voisine sont proportionnelles à $k^{\frac{1}{2}}$. Les points de contact des tangentes doubles et des tangentes d'inflexion se trouvent aux sommets simples (voir la fig. 27).

Les courbes dont il s'agit ici sont des courbes singulières ordinaires d'un système de quartiques générales. — Les courbes qu'on trouve dans le cas où l'équation (XXI) devient identique ne sont pas des courbes singulières ordinaires d'un système de quartiques générales. L'équation (XIII) peut conduire à de nouvelles représentations des courbes singulières dont nous avons parlé ici et dans le n° précédent.

46. Quartiques composées de deux droites doubles. — Les seules courbes composées de deux droites doubles qu'on rencontre ordinairement dans un système de quartiques générales, sont celles dont la représentation la plus simple s'obtient en remplaçant, dans l'équation (II) (du n° 42), A_2 par un carré (x^2). On trouve alors l'équation (XXII). La droite double $y = 0$ est de la seconde espèce et douée de 6 sommets, et la droite double $x = 0$, de la première espèce et douée de 3 sommets. Le point d'intersection est un sommet triple de la même forme que ceux dont il a été parlé dans le n° 41, avec la seule différence qu'il y passe une branche qui ne contribue pas à sa formation. (Voir la fig. 28).

47. Courbes de l'ordre n avec une branche droite r-tuple. — Dans le système représenté par l'équation (XXIII), la courbe $k = 0$ a la droite $y = 0$ pour branche r-tuple. Ses points d'intersection avec la courbe résidue sont des sommets doubles, et elle a encore $(r-1)(2n-r)$ sommets simples. $n = r = 3$ donne des courbes singulières ordinaires d'un système de cubiques, et $n = 4$, $r = 3$ ou $r = 4$, des courbes singulières ordinaires d'un système de quartiques. Dans ces deux derniers cas, un des sommets ne sera pas déterminé immédiatement par les conditions données, mais sa position dépendra de celle des autres sommets, ce qui est une conséquence du fait que 11 des tangentes menées d'un point à une quartique en déterminent la 12ème.

48. Coniques doubles. — On trouve ordinairement, dans un système de quartiques générales, des coniques doubles douées de 8 sommets. Représentée par l'équation (XXIV), une de ces courbes est à une distance proportionnelle à $k^{\frac{1}{2}}$ des deux branches d'une courbe voisine qui tendent à coïncider.

49. Règles pour compter les courbes douées de branches multiples. — Dans un système de courbes tangentes à une courbe donnée C, une courbe singulière dont une branche r-tuple a ce contact devra être comptée, parmi les courbes singulières de même espèce du système, pour un nombre r fois plus grand qu'elle ne le serait si c'était une branche simple qui fût tangente à C. La courbe C peut être, en particulier, une droite ou un point (par lequel les courbes du système passent), et les branches de la courbe singulière peuvent être des droites ou des sommets (qui se trouvent sur C).

En effet, si, pour la représentation la plus simple, les distances des branches d'une courbe voisine qui tendent à coïncider avec la branche r-tuple sont irrationnelles, il faut, au cas où cette branche est tangente à C, remplacer cette représentation par une autre, dans laquelle la courbe singulière doit être comptée pour r, et, si les distances sont rationnelles, la courbe singulière est la limite de r différentes séries de courbes du système. (Comparer aux n^{o}s 11, 12 et 43).

On trouve au moyen de cette règle, à des facteurs constants près, les nombres ξ, η .. ϑ des courbes singulières d'un système de cubiques ou de quartiques qui sont tangentes à des courbes données, ou au moins (courbes λ et ν) les valeurs des termes dont ces nombres sont composés. On trouve expérimentalement les valeurs de ces facteurs au moyen des vérifications qui se présentent dans la recherche des caractéristiques élémentaires. Pour les systèmes de cubiques, les facteurs constants des nombres ξ et λ sont 1 et 40. Pour les systèmes de quartiques, le facteur de η, ζ, $\varkappa$, ϑ (et de ψ et χ dont nous parlerons dans ce qui suit) est 1, et celui de ξ est 2 tant que le passage par une courbe ξ se fait de deux manières différentes (voir la description des figures dans le n^{o} 42), mais, dans le cas contraire, seulement 1 (voir les n^{o}s 55, 56, 57, 62, 64 et 65). Les valeurs des coefficients des différents termes de λ et ν sont indiquées aux endroits de la 4^{me} partie où nous les trouvons.

50. Formules pour les systèmes $n = 3$, $d = e = 0$. — Nous pouvons à présent déterminer les coefficients des termes supplémentaires qui rendent les formules trouvées dans la deuxième partie, applicables aux cas où les systèmes de cubiques ou de quartiques sont doués de courbes à branches multiples appartenant aux courbes singulières ordinaires. Nous attribuons ici aux formules les mêmes n^{o}s qu'à celles dont elles sont formées (voir le texte danois).

51. Formules pour les systèmes $n = 4$, $d = e = 0$. — Nous avons écrit les coefficients de manière à faire voir comment ils sont formés d'après la règle du n^{o} 26. Ces coefficients indiquent donc les ordres des différentes quantités infiniment petites, savoir: 1^{o} ceux que nous avons trouvés dans ce qui précède; 2^{o} ceux que nous avons encore trouvés directement de la même manière, et 3^{o} ceux que nous trouvons indirectement en faisant usage des vérifications que permet le nombre superflu d'équations. Tous les coefficients des formules (3), (3'), (9) et (12) appartiennent à la première catégorie. Le mémoire donne donc une démonstration directe de ces formules, qui servent à la détermination des caractéristiques élémentaires.

52. Nouvelle espèce de courbes douées d'une branche droite double dans les systèmes $n = 4$, $d = 1$, $e = 0$. — Dans les systèmes de quartiques douées d'un point double, on trouve, à côté des cas particuliers de celles dont nous avons parlé, les formes plus modifiées dont il est question dans les n^{os} 52 et 53.

Les sommets doubles d'une quartique douée d'une branche droite double de la deuxième espèce (voir le n° 42), peuvent coïncider et former un point double et un sommet double. On aura ainsi une courbe composée d'une conique et d'une droite double qui y est tangente; le point de contact est à la fois un point double et un sommet double, et la droite double est douée de 6 sommets simples. La représentation la plus simple de cette courbe se fait par une équation renfermée dans la forme (IX) (voir le n° 43); les distances de la droite double aux branches d'une courbe voisine qui tendent à coïncider sont prop. à k, mais la distance entre ces branches est prop. à k^2; la distance du sommet double aux branches qui tendent à le former, et l'angle des tangentes au point double de la courbe voisine, sont prop. à $k^{\frac{1}{2}}$.

Voir la fig. 29. — Si la courbe résidue se réduit à deux droites imaginaires ou réelles, on aura une courbe singulière ordinaire d'un système de quartiques douées d'un point cuspidal; voir les figures 30 et 31.

53. Nouvelle espèce de courbes douées de deux branches droites doubles dans les systèmes $n=4$, $d=1$, $e=0$. — On trouve encore ordinairement dans ces systèmes, des courbes composées de deux droites doubles dont le point d'intersection est à la fois un point double et un sommet double; chacune des deux droites doubles a encore 4 sommets. La distance à une courbe voisine est, pour la représentation la plus simple (XXV), prop. à k. Seulement celle du sommet double, qui est semblable à ceux des courbes α_2, aux branches qui tendent à le former, est prop. à $k^{\frac{1}{2}}$. Voir la fig. 32.

54. Formules pour les systèmes $n=4$, $d=1$, $e=0$. — Les courbes à branches multiples qu'on trouve ordinairement sont les courbes α, ψ et χ, des courbes ξ, dont la courbe résidue est composée de deux droites, et des courbes λ et ν, où le point double est formé par la coïncidence de deux sommets.

Dans les systèmes où le point double doit se trouver en un point donné ou sur une droite donnée, on trouve encore des courbes ξ, η, ζ, $\varkappa$, et ϑ dont les points doubles sont formés par la coïncidence de deux sommets. ξ_1 est le nombre des courbes ξ ordinaires; ξ_2, celui des courbes ξ extraordinaires; $\varkappa_1$ et $\varkappa_2$ désignent respectivement les nombres des courbes $\varkappa$ dont le point double se trouve sur la droite double de la première ou de la deuxième espèce. Nous mettons ici et dans le n° 55 en parenthèse carrée les termes dus aux courbes singulières extraordinaires.

55. Systèmes $n=4$, $d=2$, $e=0$. — ξ_0 est le nombre des courbes ξ où deux sommets simples, en coïncidant avec un sommet double, forment deux points doubles. $[\lambda]$, $[\nu]$, $[\psi]$, $[\chi]$ sont les nombres des courbes λ, ν, ψ, χ dont la droite multiple qui joint les deux points doubles passe par un des points donnés du système.

56. Systèmes de quartiques dont deux branches se touchent. — Dans les courbes ξ de ces systèmes, trois sommets simples coïncidant avec un sommet double forment le point de contact de deux branches et un sommet simple. τ est le nombre des courbes où le point de contact est devenu point triple; b_1 l'ordre du lieu du point singulier, et x la classe de l'enveloppe de la tangente en ce point.

57. Systèmes de quartiques douées d'un point triple. — Dans les courbes ξ le point singulier est formé par la coïncidence de 4 sommets simples avec un sommet double.

58. Exemples de courbes réciproques à ξ et λ. — Extension des formules du n° 35 au cas où il y a aussi certaines courbes singulières extraordinaires.

Quatrième partie.

Détermination des caractéristiques des systèmes élémentaires de quartiques.

59. Systèmes $n = 3$, $d = 0$, $e = 1$. — Nous désignons par $[P]$ le nombre des courbes qui ont une tangente donnée en un des points donnés du système, et par $[L]$ le nombre de celles qui ont un point de contact donné avec une des tangentes données.

60. Systèmes $n = 3$, $d = 1$, $e = 0$.

61. Systèmes $n = 3$, $d = e = 0$.

62. Systèmes de quartiques douées d'un point triple. — Le problème principal de la recherche des caractéristiques élémentaires de quartiques, c'est la détermination de celles des quartiques générales. Pour atteindre à ce but (n° 70), nous devons d'abord (dans les n°s 62—69) nous occuper de beaucoup d'autres systèmes de quartiques. Cette suite de recherches fournira tant de moyens de déterminer aussi les caractéristiques des systèmes de quartiques qui resteront encore, qu'on ne rencontrera pas là de nouvelles difficultés sérieuses, ce que nous montrerons par quelques exemples dans le n° 71.

Pour le système actuel on fait usage des formules du n° 57. On peut déterminer α_1, ξ, $[\xi]$ (1). Dans le premier système $[b_1] = 1$, et dans les autres on connaîtra d'avance μ.

63. Systèmes $n = 4$, $d = 3$, $e = 0$. — Voir 39. On aura des vérifications en égalant le μ' d'un système au μ du suivant.

(1) Nous mettons — dans les exemples de déterminations de nombres de courbes singulières — avant les signes $\{\}$ les facteurs qui correspondent aux différents choix des tangentes qui déterminent les sommets simples, et avant les signes $[\,]$ ceux qui correspondent aux autres sommets. Où il est nécessaire, nous ajoutons aux nombres des points ou des accents, pour indiquer qu'ils appartiennent à des points ou à des tangentes données. — On fait parfois plusieurs applications d'une même détermination: ξ, dans les n°s 62 et 64; ξ_1 et ψ, dans les n°s 67 et 69; ξ_2, η et ζ, dans les n°s 68 et 70, en sont des exemples. — Les barres noires des tables séparent, pour chaque système, les nombres qu'on doit connaître ou déterminer d'avance de ceux qu'on en déduit. [Dans la table du n° 62, la barre devait séparer μ et μ' dans tous les systèmes à l'exception du premier].

64. Systèmes $n = 4$, $d = 2$, $e = 0$ (voir le n° 55). — Dans le premier système, on emprunte $(2d)$ au premier système du n° 65; dans les autres on connaît d'avance μ. Dans cette table et dans les suivantes, la valeur du μ' d'un système est placée au dessous de son μ.

65. Systèmes de quartiques dont deux branches se touchent. — Dans tous les systèmes, à l'exception du premier (voir 64), on connaît d'avance les valeurs de μ et de μ'. Les équations du n° 56 suffiront donc à la détermination des coefficients A et B de λ et de ν (voir 49) et des nombres b_1 et $[b_1]$.

66. Systèmes de quartiques douées d'un point double fixe et d'un point double libre. — μ et μ' étant connus d'avance, les équations du n° 55 suffiront à la détermination des coefficients de λ et de ν $(A = 360,\ B = 32760)$ et des nombres b et $[b]$. L'origine du coefficient 2 de $(2d)$ et de ξ_0 est indiquée dans le n° 19 du résumé.

67. Systèmes de quartiques douées d'un point double sur une droite donnée et d'un point double libre. — Les coefficients de λ et de ν sont les mêmes que dans le n° 66. b_0 est l'ordre du lieu du point double libre; b_1, le degré de multiplicité de la droite, lieu de l'autre point double.

68. Systèmes de quartiques douées d'un point double fixe ou d'un point double sur une droite donnée (voir 54). — Les équations de vérification d'une seule de ces deux séries de systèmes (μ' d'un système $=$ μ du système suivant) ne suffiront pas à la détermination des coefficients de λ et de ν, qui sont — à deux près — les mêmes dans les deux séries. On doit donc les discuter à la fois.

Les coefficients ont les significations suivantes: A, B, C sont les nombres des solutions [1] des problèmes suivants: trouver le point double, un des 8 sommets simples ou le sommet double d'une courbe λ, les autres de ces 10 points étant connus.

D est l'ordre du lieu d'un sommet simple, du sommet double, ou du point double d'une courbe λ dont la droite triple pivote autour d'un point fixe, pendant que les autres de ces points parcourent des droites. Si une de ces droites passe par le point fixe, c'est-à-dire si ce point est lui-même le point double, un sommet simple ou le sommet double, il faut substituer $D-A$, $D-B$, $D-C$ à D.

E et F sont les nombres des solutions des problèmes suivants: trouver le point double ou un des 10 sommets d'une courbe ν, les autres de ces 11 points étant connus.

G est l'ordre du lieu d'un sommet ou du point double d'une courbe ν, si la droite pivote autour d'un point fixe et que les autres de ces 11 points parcourent des droites. Si le point fixe est lui-même le point double ou un sommet, il faut substituer $G-E$ ou $G-F$ à G.

Dans la seconde table il faut emprunter les valeurs de b à la colonne μ de la première table.

69. Systèmes élémentaires $n = 4$, $d = 1$, $e = 0$. — Les coefficients de λ et de ν sont les nombres A et E du n° précédent.

---

[1] A, B, . . étant proprement des nombres de courbes λ et ν, il est possible que les nombres des solutions n'en soient que des facteurs.

70. Systèmes $n = 4$, $d = e = 0$ (voir 51). — Les coefficients de λ et de ν ont les significations suivantes:

H et I sont les nombres des solutions des problèmes suivants: trouver un des 9 sommets simples ou le sommet double d'une courbe λ, les autres de ces 11 points étant connus.

K est l'ordre du lieu du sommet double ou d'un sommet simple d'une courbe λ dont la droite triple pivote autour d'un point fixe, pendant que les autres sommets parcourent des droites ($K - H$ ou $K - I$, si le point fixe est lui-même un sommet simple ou double).

L est le nombre des solutions du problème: 11 sommets d'une courbe ν étant connus, en trouver le 12^{me}.

M est l'ordre du lieu d'un sommet d'une courbe ν, si la droite pivote autour d'un point fixe et que les autres sommets parcourent des droites ($M - L$, si le point fixe est lui-même un sommet).

71. Autres systèmes élémentaires de quartiques.

2^{me} exemple. La première table contient les valeurs des β des systèmes des n^{o}s 68 et 69. (t, nombre des tangentes données). Au moyen de ces résultats, on peut trouver les nombres μ, μ', c et $[c]$ des systèmes élémentaires $n = 4$, $d = 0$, $e = 1$ (seconde table où μ' se trouve à droite de μ).

3^{me} exemple. Systèmes $n = 4$, $d = 1$, $e = 2$. — On commence la recherche (voir 37) par le système $4\,P\,4\,L$ où $\mu = \mu'$. Alors, dans les autres systèmes, on connaîtra d'avance μ ou μ'.

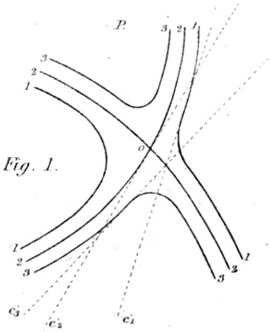


Fig. 1.

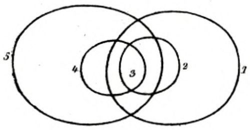


Fig. 2.

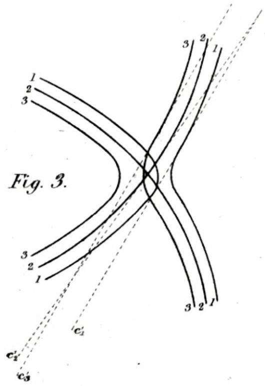


Fig. 3.

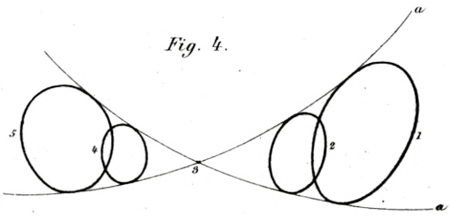


Fig. 4.

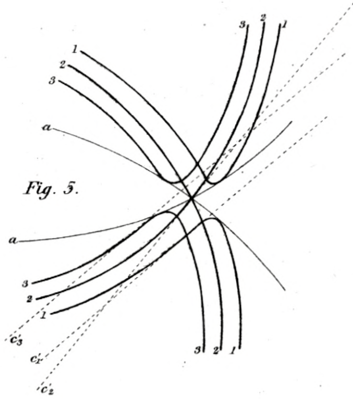


Fig. 5.

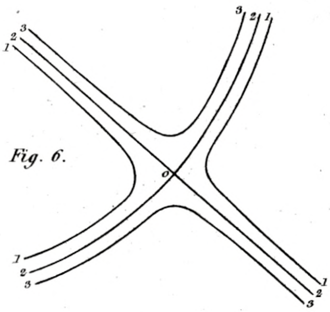


Fig. 6.

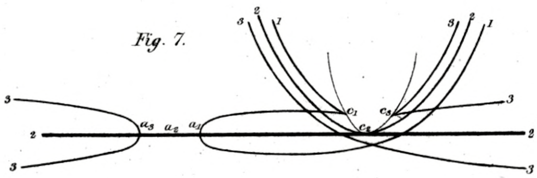


Fig. 7.

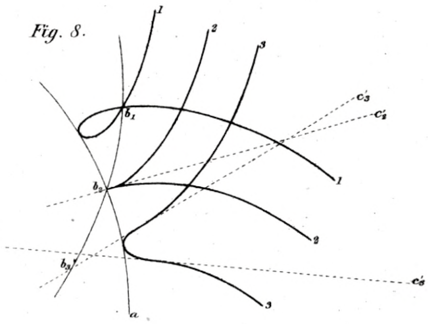


Fig. 8.

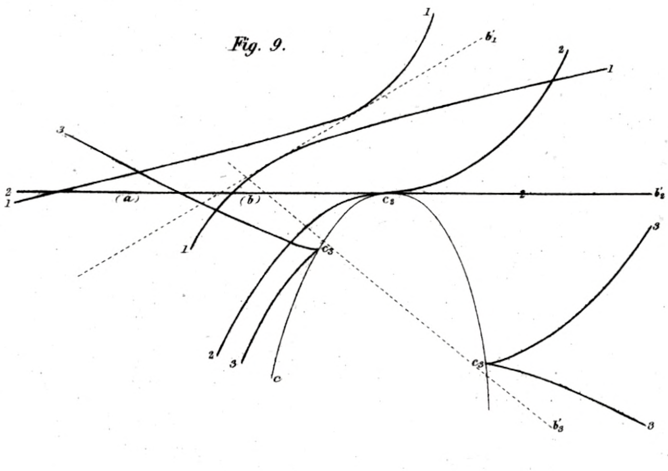


Fig. 9.

Fig. 10.

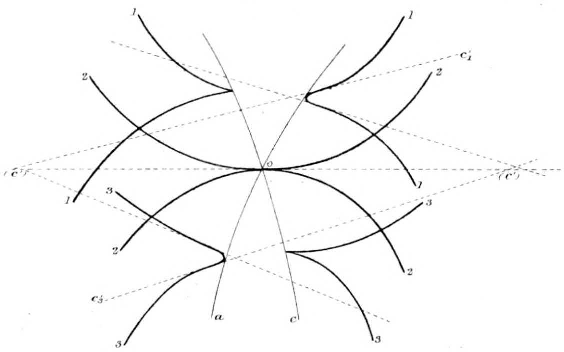


Fig. 11.

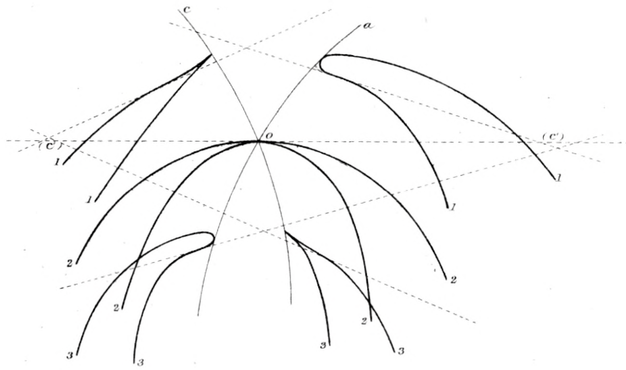


Fig. 12.

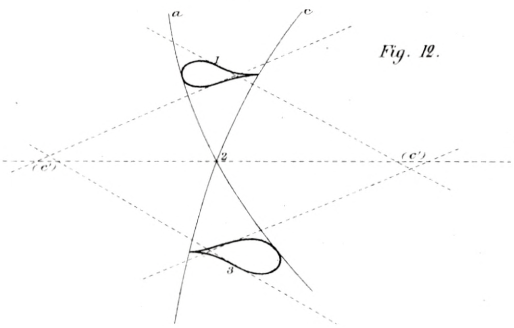


Fig. 13.

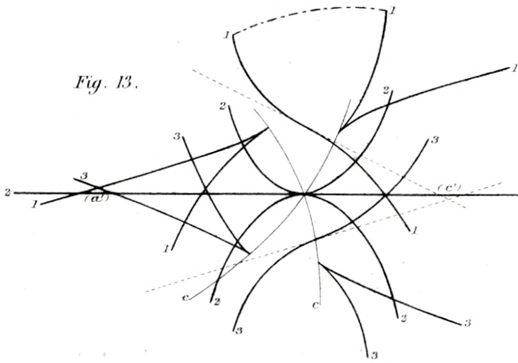


Fig. 14.

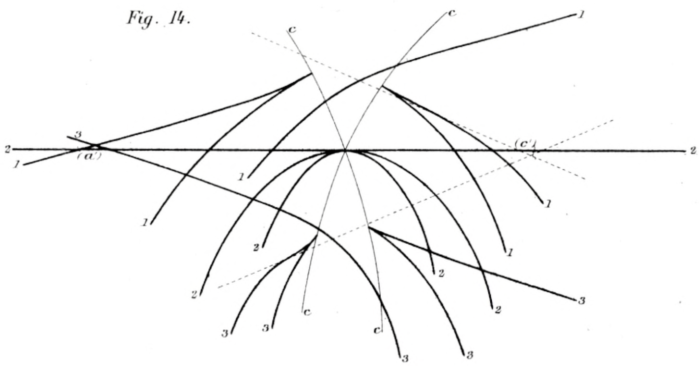


Fig. 15.

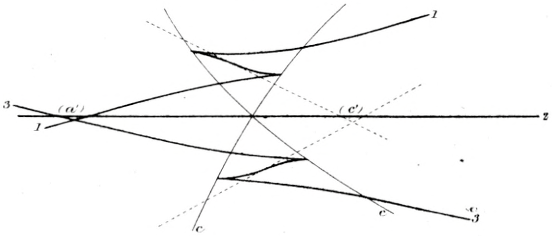


Fig. 16.

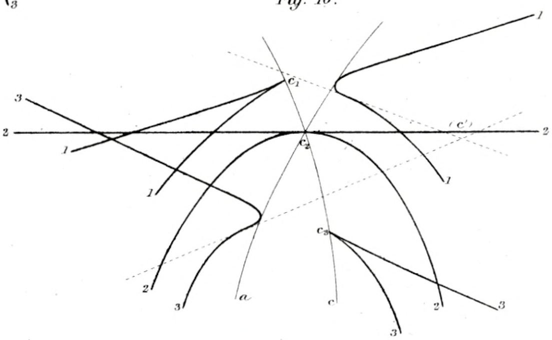


Fig. 17.

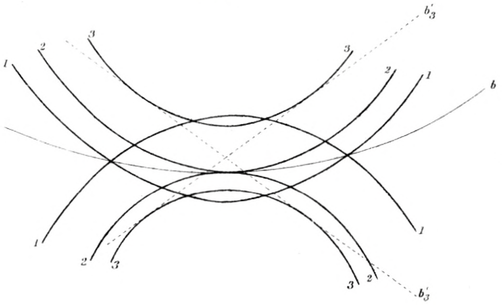


Fig. 18

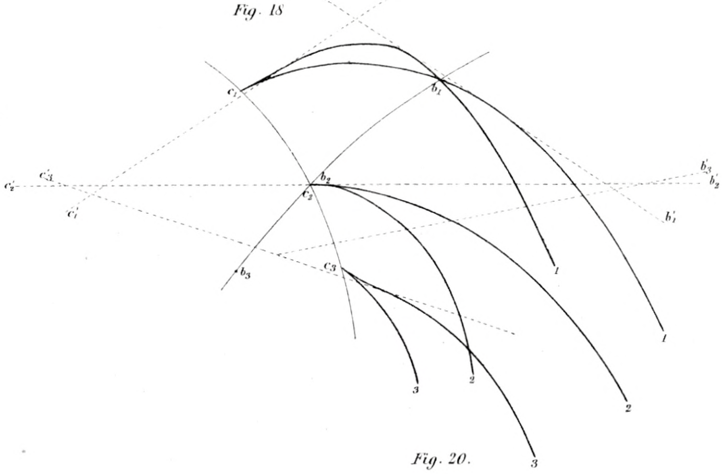


Fig. 19.

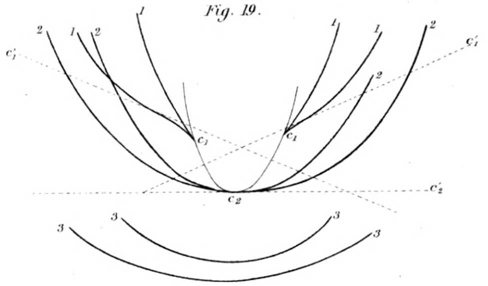


Fig. 20.

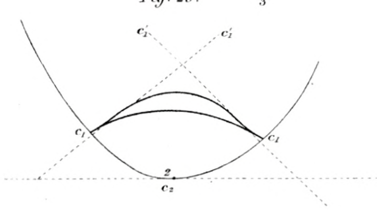


Fig. 21.

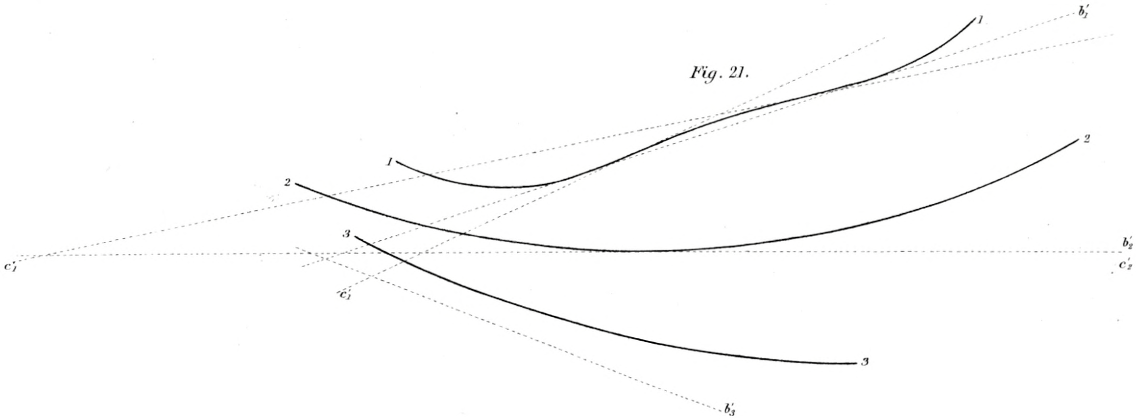


Fig. 22.

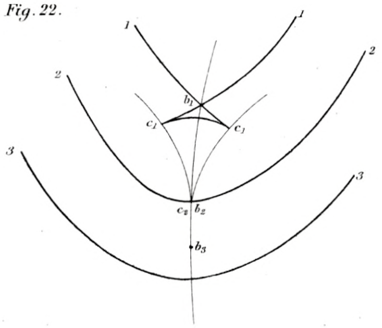
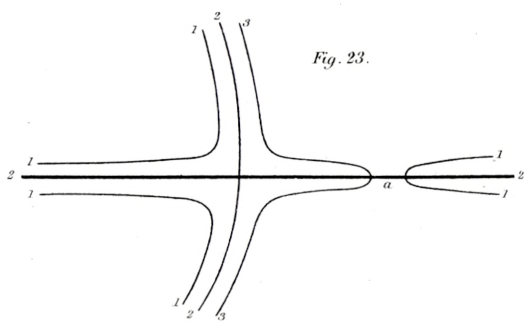


Fig. 23.



rgh's lith Inst.

C. Friis Jespersen del.

Fig. 24.

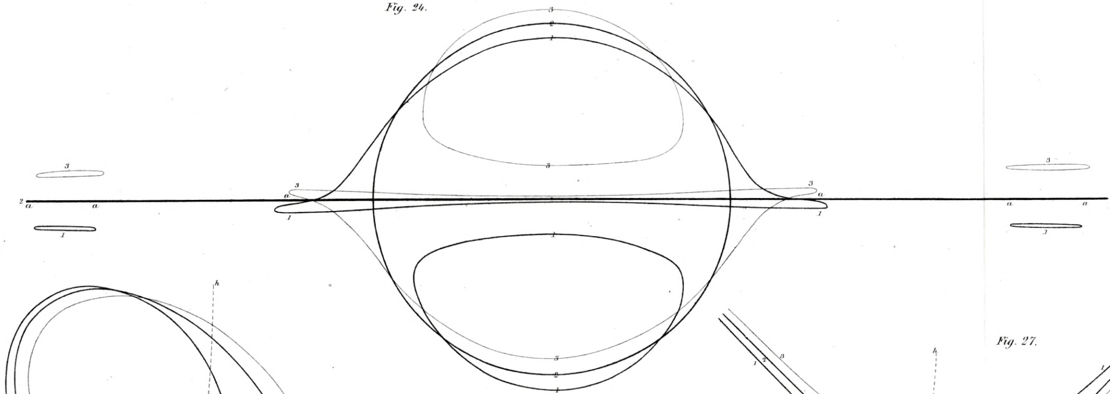


Fig. 26.

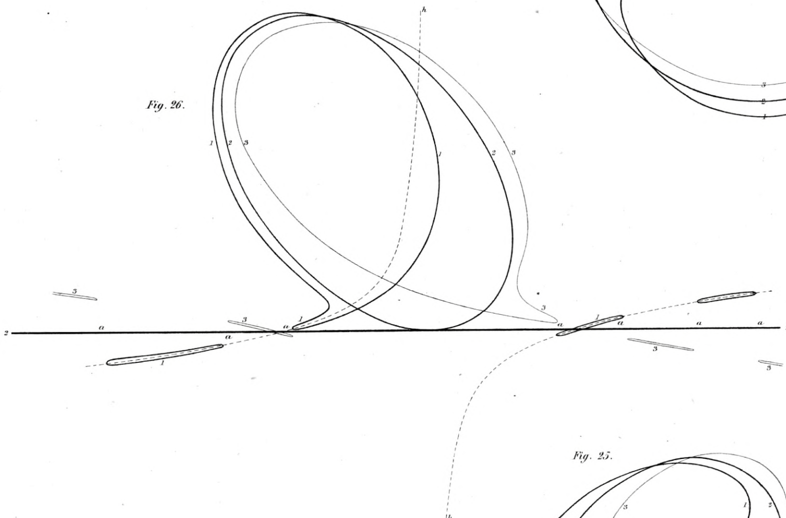


Fig. 27.

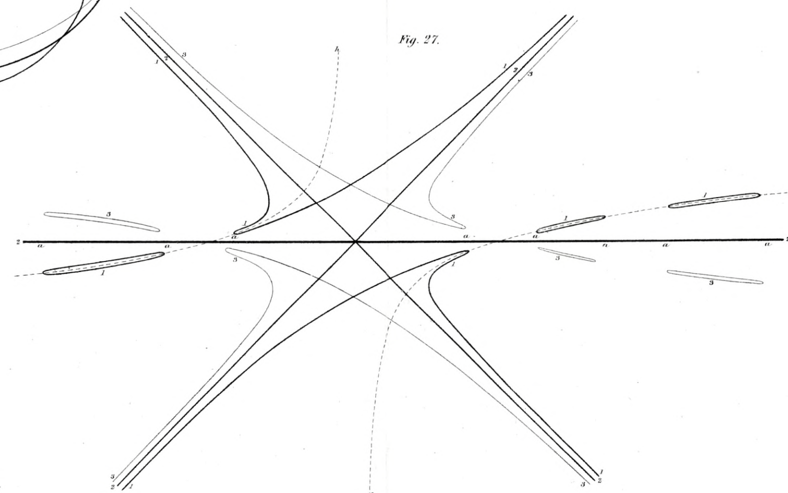
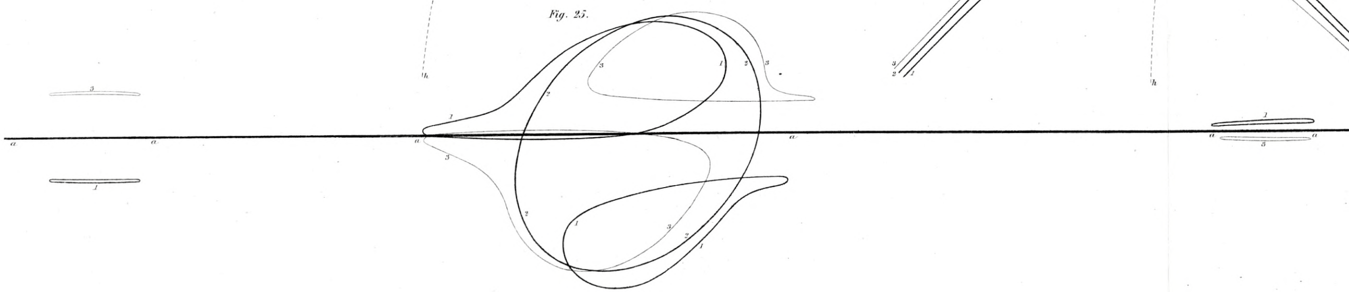


Fig. 25.



Th. Berghs lith. Inst. G. Fritz Jespersen del.

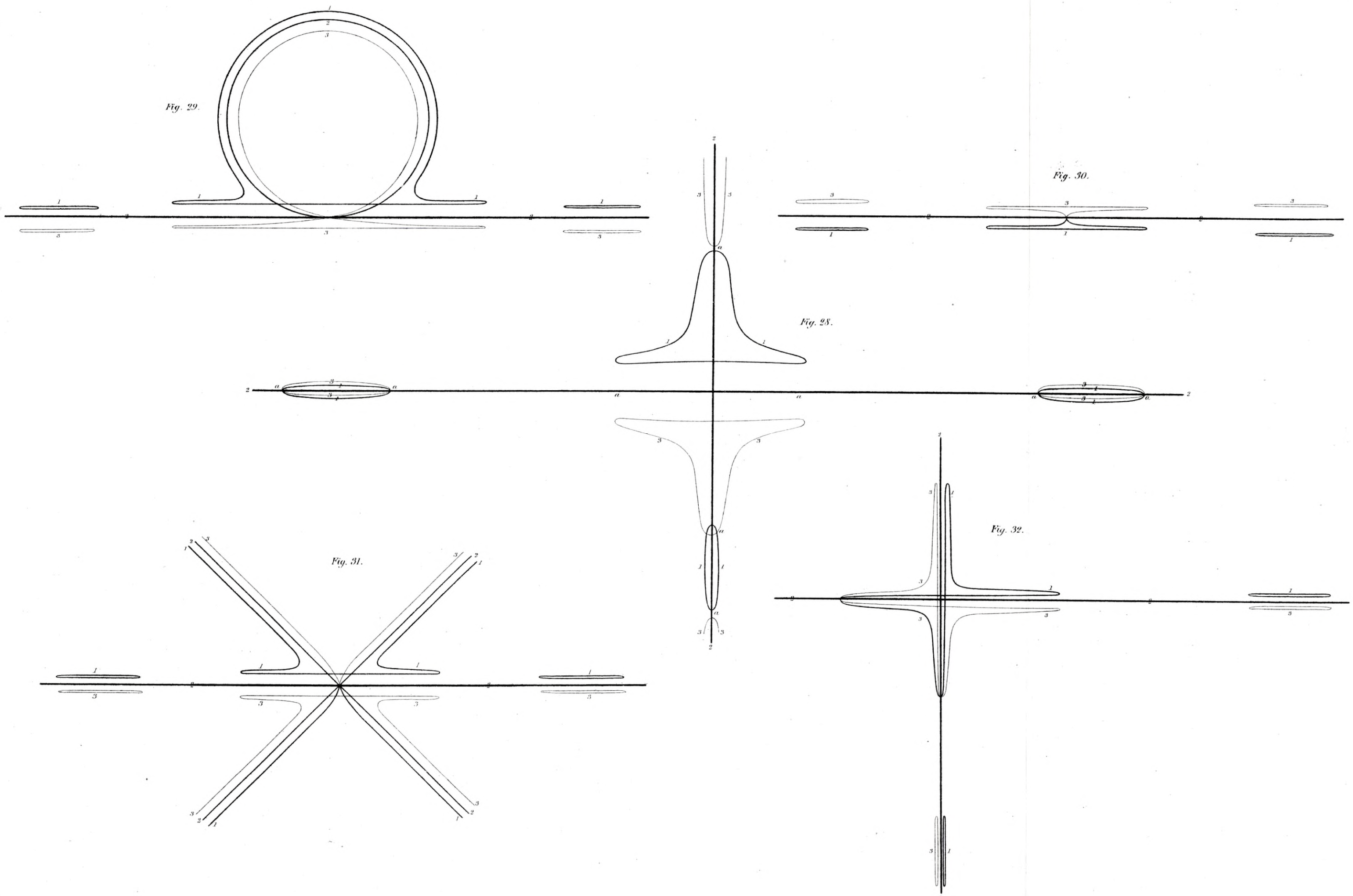


Fig. 28. Fig. 29. Fig. 30. Fig. 31. Fig. 32.

Th. Bergh's lith. Inst.

C. Frits Jespersen del.